

LEZIONI ELEMENTARI

DI

FISICA MATEMATICA

DATE NELL' UNIVERSITÀ DI CORFÙ NELL' ANNO SCOLASTICO 1840-41

DA

OTTAVIANO FABRIZIO MOSSOTTI

PROFESSORE DI MECCANICA CELESTE E FISICA MATEMATICA NELL' I. E R. UNIVERSITA' DI PISA, UNO DEI QUARANTA DELLA SOCIETA' ITALIANA DELLE SCIENZE, SOCIO NAZIONALE NON RESIDENTE DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO, SOCIO STRANIERO DELLA R. SOCIETA' ASTRONOMICA DI LONDRA, SOCIO CORRISPONDENTE DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI NAPOLI, DELL' I. R. ISTITUTO LOMBARDO, DELL' ISTITUTO DI BOLOGNA EC.

TOMO II.





FIRENZE

COI TIPI ED A SPESE DI G. PIATTI

1845

AVVISO

DELL' AUTORE

Questo secondo tomo contiene, come si è annunciato, l'Acustica e l'Ottica. Nell'Acustica siamo stati piuttosto brevi, essendoci limitati ai principii fondamentali, ed avendo omesso quanto appartiene alle pure applicazioni. Nell' Ottica ci siamo invece maggiormente diffusi. Le belle proprietà della luce che sono state riconosciute in questi ultimi tempi, e le ingegnose teorie che ne sono emerse figurano fra le più brillanti scoperte dell' ingegno umano, e tengono il primo posto fra quelle che onorano il nostro secolo. Abbiamo quindi procurato di dare un' idea precisa e completa dei principii di queste nuove teorie. Rispetto agli sperimenti non si sono citati che quei pochi necessarii a stabilire i principii teorici. Le teorie fisiche al loro nascere s' appoggiano su di un gran numero d' esperienze: di mano in mano che si fanno adulte le abbandonano, e camminano solo colla scorta di pochi fatti primitivi.

Nell' applicare il sistema delle ondulazioni alla spiegazione dei fenomeni ci siamo attenuti alle prime idee di Huyghens, che considerò la superficie dell' onda come l' inviluppante di tutte le superficie che generano le vibrazioni dei singoli atomi, e che abbiamo chiamato

superficie fluenti. Questo modo di concepire la propagazione della luce arreca più uniformità alle dimostrazioni, quindi non solo l'abbiamo adottato per la spiegazione della riflessione e rifrazione ordinaria, ma ne abbiamo esteso l'applicazione alla teoria della doppia rifrazione nei cristalli con uno o due assi ottici (1). *La causa meccanica della dispersione, e della doppia rifrazione è stata da noi attribuita alla costituzione molecolare dei corpi sino dal tempo in cui queste lezioni furono scritte, quantunque non ci sia riuscito di dimostrarlo che posteriormente* (2). *Rispetto alle leggi della riflessione e rifrazione ordinaria della luce polarizzata ed alla scelta del piano di polarizzazione abbiamo seguito i principi di Fresnel.*

La parte fisica della teoria della luce è seguita da una applicazione elementare alla spiegazione degli effetti degli stromenti ottici e di alcuni fenomeni metereologici, col titolo di OTTICA MATEMATICA. *Nell'analizzare l'effetto di più lenti o specchi, combinati assieme, dei quali sono comunemente composti gli stromenti ottici, abbiamo pure seguito un metodo uniforme e costante. Questo metodo consiste nel tracciare per ciascun pennello di raggi che emana da un punto luminoso, un nuovo raggio principale ad ogni lente o specchio che incontra: in questo modo si evitano certe inesattezze relative all'effetto di alcuni istromenti più comuni, che si trovano ripetute in molti libri. L'ultima lezione versa sopra alcuni fenomeni metereologici, come l'iride e gli aloni: il Lettore troverà in questa Lezione, e nella nota annessa, la spiegazione degli archi soprannumerarii dell'iride, già stata accennata dal Dott. Young, ma che manca in tutti i Trattati di Fisica.*

Alle Lezioni si sono fatte succedere, come nel Tomo precedente, molte Note, alcune delle quali sono relative alle dimostrazioni di certe

(1) Le dimostrazioni acquistano tuttavia maggior eleganza dall'impiego delle inviluppanti quando le questioni sono trattate coll'analisi superiore, come lo daremo a divedere in un Trattatello a parte, che potrà unirsi, da chi desidera, qual supplemento a queste Lezioni. Frattanto ricorderemo che già esiste in italiano sulla teoria analitica della doppia rifrazione un buon libretto scritto dal Sig. Prof. Giovanni Codazza col titolo di *Propagazione della luce omogenea nei mezzi omogenei*. Milano 1840.

(2) Vedansi gli Atti della 3.^{za} e 6.ta Riunione degli Scienziati Italiani.

proposizioni matematiche assunte nel testo, ed altre contengono le teorie un poco più difficili, ma tuttavia suscettibili d'essere esposte colle semplici nozioni delle matematiche elementari. Le note cominciano con una dimostrazione sintetica della grandezza della velocità del suono nei mezzi aeriformi. La prima dimostrazione di questa specie fu data da Newton, ma essa fu impugnata da varii autori. Lagrange, che da principio era fra questi, ne rivendicò dipoi in parte la giustezza e per ovviare ad alcune obiezioni ancora sussistenti, la generalizzò, rendendola forse troppo astratta (1). *La dimostrazione che abbiamo dato ammenda quella di Newton, e ne conserva tutta la semplicità. Il fenomeno singolare, che i due raggi polarizzati ad angolo retto fra loro, ottenuti colla decomposizione di un raggio di luce comune, sono tali che due loro porzioni condotte ad uno stesso piano di polarizzazione, non sono atte ad interferire, mentre due porzioni di raggio comune lo sono, merita una considerazione particolare perchè somministra un principio fondamentale d'ottica fisica. Ci siamo perciò arrestati, nella Nota I alla Lezione XXXII, a darne una spiegazione teorica più completa e precisa che non era stata presentata fin ora. Nelle Note I alle Lezioni XXXIII e XXXIV si sono riferiti i ragionamenti coi quali Fresnel pose le basi delle leggi della riflessione e rifrazione della luce polarizzata e della polarizzazione circolare. Quantunque questi ragionamenti non siano dotati di tutto il rigor matematico ci sembrano i più soddisfacenti in via elementare e meritano d'essere conosciuti. La Nota I della Lezione XXXVII è illustrativa del modo con cui si può concepire generata la rotazione del piano di polarizzazione di un raggio che penetra in una lamina di quarzo parallelamente all'asse ottico, e di altri fenomeni analoghi scoperti dal Sig. Biot.*

Mi lusingo che quelli che vorranno intraprendere un corso di studii sulle dottrine ottiche, secondo il sistema delle ondulazioni, troveranno in queste Lezioni elementari appianata la via, e rimosse varie difficoltà che l'ingombravano.

O. F. MOSSOTTI.

(1) Mémoires de l'Académie de Berlin 1786.

INDICE

DELLE MATERIE



ACUSTICA.

LEZIONE XX.

Esposizione dei principali fenomeni concernenti la formazione e propagazione del suono.

OTTICA.

LEZIONE XXIII.

Fenomeni e leggi della luce diretta, e della luce riflessa e rifratta ordinariamente.

LEZIONE XXIV.

Dispersione ed analisi della luce per mezzo della rifrazione.

LEZIONE XXV.

Della luce assorbita, diffusa, e dei colori dei corpi.

LEZIONE XXVI.

Principii fondamentali del sistema delle ondulazioni.

LEZIONE XXX.

Della doppia rifrazione nei cristalli ad un asse ottico.

LEZIONE XXXI.

Doppia rifrazione dei cristalli con due assi ottici.

LEZIONE XXXIII.

Leggi della polarizzazione della luce riflessa e rifratta dalle superficie diafane dotate di rifrazione semplice.

LEZIONE XXXIV.

Polarizzazione circolare ed ellittica.

LEZIONE XXXV.

Colorazione delle lamine cristallizzate.

LEZIONE XXXVI.

Degli anelli colorati che circondano gli assi ottici dei cristalli.

LEZIONE XXXVII.

Dei fenomeni cromatici prodotti dalla polarizzazione circolare.

OTTICA MATEMATICA.

LEZIONE XXXVIII.

Specchi e Lenti.

LEZIONE XXXIX.

Stromenti ottici.

LEZIONE XL.

Telescopio, e Microscopio.

LEZIONE XLI.

Spiegazione di alcuni fenomeni meteorologici luminosi.

INDICE DELLE NOTE

ACUSTICA

LEZIONE XX.

LEZIONE XXI.

LEZIONE XXII.

OTTICA FISICA.

LEZIONE XXIII.

LEZIONE XXIV.

LEZIONE XXVI.

LEZIONE XXVIII.

LEZIONE XXIX.

LEZIONE XXX.

LEZIONE XXXI.

LEZIONE XXXII.

LEZIONE XXXIII.

LEZIONE XXXIV.

LEZIONE XXXVI.

LEZIONE XXXVII.

LEZIONE XXXVIII.

LEZIONE XL.

LEZIONE XLI.



TAVOLA D'ERRORI A CORREGGERSI

Pag.	lio.	ERRORI	CORREZIONI
5	24	$\frac{\Upsilon}{H}$	Υ
13	2	intermedia	intermedia fra
18	12	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$
23	1, 8	la densità	la variaziooe della densità
30	11	Fig. 7	Fig. 8
38	10	$\frac{BT}{AT}$	$\frac{AT}{BT}$
38	14	30539,2	$3058^m,5$
42	2	$P' E e$, $e E f$	$P' E e'$, $e E t$
47	25	B e G	B e C
49	16	Olio di trement. ed acqua	Cronw-glass ed acqua
49	24	meno rosso e più vioietto	un' estensione minore al rosso e maggiore al violetto
53	37, 38	$X S$.	$X I$
59	30	assorbiti	più assorbiti
62	1	loce	loce del sole
83	26	$A B$	$A P$
93	5	sopra	sopra, che gli hanno dato per ia iunghezza delle oodolazioni dei raggi trasmessi da uo vetro rosso $0^m,000638$
126	32	$E y e X$	(*tolgasi*)
131	37	i doe	i due rsggi
132	22	del piano	o del piaoo
132	26	fig. 71	fig. 57 *bis*
133	25	$\frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{c\sqrt{a^2-b^2}}$	$\frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{a\sqrt{b^2-c^2}}$
146	16	fra loro.	fra loro. Vedasi ia Nota I.
154	ult.	art. 2	art. 12
158	24	$\frac{1}{2} p^2 \ldots \frac{1}{2} q^2$	$\frac{1}{2} p^{2n} \ldots \frac{1}{2} q^{2n}$
165	26	$n = 1,51$	$n = \frac{1}{1,51}$
170	21	fra ie tangeoti	fra i iogaritmi delle tangenti
171	6	espresse	espresso
172	34	perpeodicolare all' asse ottico ed ai piano	perpendicolare ai piano
176	36	I_s^2 ed indicando	I_s^2 indicaodo
179	31	straordinarii	ordinarii
180	21	I	I^2
195	19	i' equaziooe (6)	l' equaziooe (3)
199	34	$0,^{nm}00628$	$0^m,000628$
201	36	dei quadrati delle lunghezze	delle longhezze
—	37	in questa ragione	nella ragione del quadrato di essa
204	4	$(0,00628)^2$	$(0,000628)^2$
212	22	convessa convesso, e che	convergente, e che
219	3	$o P o'$	$o C o'$.

Pag.	lin.	ERRORI	CORREZIONI
223	20	nell' interno dell' occhio	nel suo interno
224	23	(2)	(3)
ivi	26	notabili ,	notabile e costante ,
227	30	$L\,I$	$L\,l$
228	18	$O\,C\,o$	$O\,L\,o$
230	14	$B\,C$	$B\,c$
— penul.		del campo	della metà del campo
231	6	il campo	il semi-campo
232	23	$O\,A\,a$	$O\,A\,o$
ivi	25		
234	23	fig. 121	fig. 124
ivi	24	il campo	il semi-campo
241	11	sono riflessi	sono riflessi dal piccolo specchio
245	11	della linea $B\,C$ di quello	della stessa parte della linea $B\,C$
247	8	Verde porpora	Verde , porpora
251	13	della circonferenza	delle circonferenze
252	22	$\sin E = n \sin 2\,F\,.\,\Delta = 2\,E - F$	$\sin I = n \sin \frac{1}{2}\,F\,.\,\Delta = 2\,I - F$
263	2	$M\,Q$	$m\,Q$
282	31	fig. 140	fig. 142
286	22	$'p\,p\,P$	$'p\,p'\,P$
287	32	$\cos \frac{1}{2}\,('I + I')$	$\cos \frac{1}{2}\,(I' - 'I)$
300	13	da una parte e dall' altra	da una parte e dall' altra del mezzo
—	20	della	alla
300	21	$\tan\frac{1}{2}\varphi = \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\tan\frac{1}{2}\varphi = \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, o vero colla formola $\tan\frac{1}{2}\varphi = -\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.
311	8	massa	massima
314	5	minore	(*tolgasi*)
323	12	$\overline{M\,F}^2$	$\overline{M\,E}^2$
329	27	*birifrangente*	*unirifrangente*
347	4	$2\,\tau\,\frac{s}{V\,\tau}$	$2\,\pi\,\frac{s}{V\,\tau}$
356	5	$K\,I\,D$	$K\,I\,\Delta$
360	4. 7. 9	$I\,L'$	$l\,L'$
361	13	$o\,o' : i\,i_{,}$	$o\,o' : i\,i_{,}$
365	16	fig. 126	fig. 127
366	16	positivo fig. 127	negativo fig. 126
368	15	$\frac{1}{F} =$ ec.	(2) $\frac{1}{F} =$ ec.
369	5	$+\frac{1}{F_{,}}$	$+\frac{1}{F'}$
370	21	$\frac{1}{F} = -\frac{d'}{d'-d}\,\frac{1}{F_2}$	$\frac{1}{F} = \frac{d'}{d'-d}\,\frac{1}{F_2}$
—	22	$\frac{1}{F_{,}} = -$	$\frac{1}{F'} = -$
—	30	$\frac{1}{\rho'} = -$	$\frac{1}{\rho'} =$

ACUSTICA

LEZIONE XX.

Esposizione dei principali fenomeni concernenti la formazione e propagazione del suono.

L'idea, che abbiamo dato nella Lezione XII e seguenti del modo con cui le molecole costituite in equilibrio stabile formano i corpi, ci conduce a riconoscere che naturalmente tutti i corpi di una struttura interna uniforme e regolare devono godere della proprietà d'essere elastici. Se si comprime uno di questi corpi, o soltanto una parte di esso, di modo che le sue molecole siano obbligate ad avvicinarsi, nascono per quest'avvicinamento delle repulsioni reciproche fra le loro parti, in virtù di che si pongono in un'altro stato in cui fanno equilibrio alla forza comprimente. Se la forza comprimente cessa, le repulsioni reciproche riconducono immediatamente le molecole alla loro situazione primitiva ed il corpo ricupera la sua forma: ma come le molecole al giungere alla loro situazione naturale si trovano animate dalla velocità con cui vi giungono, in virtù di questa velocità passano più avanti, ed il corpo si estende nella direzione opposta a quella in cui era stato compresso, poi ritorna indietro e si restringe per se stesso, indi si dilata di nuovo, eseguendo così una serie di vibrazioni molto rapide che vanno diminuendo a poco a poco d'estensione, a misura che le sue vibrazioni si comunicano ai corpi circonvicini, fino a tanto che il corpo ritorna sensibilmente allo stato di riposo. Lo stesso si deve dire, se il corpo invece di essere stato da principio compresso, fosse stato allungato e poi abbandonato a se stesso.

Le vibrazioni che i corpi eseguiscono in questi casi hanno una proprietà particolare assai notabile cioè, che rispettivamente ad uno stesso corpo o ad una stessa parte del corpo posta in vibrazione, esse sono tutte *isocrone* fra di loro, vale a dire si compiono tutte ad eguali intervalli di tempo, sia che esse siano più grandi o più piccole

secondo che il corpo è stato più o meno compresso, sia che esse siano massime, come lo sono nei primi momenti in cui sono state eccitate, o siano già divenute minime, come quando stanno per estinguersi. Questa proprietà è una conseguenza della legge con cui varia la forza elastica dei corpi alcun poco compressi od allungati, i quali sempre tendono a ricuperare la loro forma con una forza proporzionale alla grandezza della compressione o dilatazione, cioè alle quantità delle quali le parti compresse o distese sono state spostate dalla loro situazione naturale. *Ut tensio sic vis,* fu il motto col quale il D.r Hook espresse in un anagramma questa legge. Ora si dimostra nella Dinamica (1) che tutte le volte che le forze sono proporzionali agli spazii che restano a percorrersi dai corpi per ricuperare la situazione in cui sarebbero per se stessi in equilibrio, sempre giungono a questa situazione in egual tempo, comunque siano stati da essa più o meno spostati, vale a dire le loro vibrazioni intorno alla loro situazione d'equilibrio sono isocrone. Per farci un'idea del come ciò possa avvenire basta osservare che i gradi maggiori di velocità che acquistano le parti vibranti nei primi istanti del movimento, allorchè sono state più allontanate dalla loro situazione d'equilibrio, le rende atte a percorrere in seguito uno spazio maggiore nello stesso tempo.

2. Le vibrazioni, delle quali abbiamo ora fatto discorso, oltre all'interesse che hanno per se stesse perchè aprono la via a studiare le forze dalle quali dipende la struttura dei corpi, ne offrono un'altro non meno importante, dando origine ad una serie di fenomeni assai rimarcabili, quelli cioè che percepisce l'udito, e somministrano i principii fondamentali di una delle arti più aggradevoli, quella della Musica.

I corpi della natura nello stato di riposo sono generalmente muti. Ogni volta che si percepisce un suono, si osserva contemporaneamente che le parti del corpo al quale si riferisce il suono si trovano in uno stato di tremito o vibrazione. Basta applicare leggiermente un dito ad una campana, o ad una corda che suoni, per accorgersi che eseguiscono una moltitudine di pulsazioni che si succedono con estrema rapidità: basta versare, come hanno fatto i Sigg. Weathstone, OErsted e Faraday, un liquido un po' viscoso sopra una lamina, che si faccia risuonare, per scorgere sulla superficie di questo liquido una quantità di linee e di punti in cui il liquido si solleva in forma di piccole onde e di piramidi. Ma

(1) Vedasi la Nota II alla Lezione IV.

vi è un modo di rendere permanenti gli effetti di queste vibrazioni che fu indicato la prima volta da Galileo (1), ed impiegato dopo con molto successo da Chladny, Paradisi, Savart ed altri, nelle loro investigazioni sulle superficie vibranti. Questo modo consiste nel tener afferrata, o semplicemente appoggiata in uno o più punti stabili, una lamina di vetro, di metallo o d'altra materia, e spargervi sopra dell'arena fina come quella che si versa sugli scritti per ascingare l'inchiostro. Si passa un archetto da violino sopra uno spigolo della lamina, o si sfrega semplicemente con un panno imbevuto di colofonia in modo da eccitare nella lamina un suono, tosto che il suono è prodotto si osserva l'arena mettersi in movimento, e prolungando un poco il suono si vedono i piccoli grani saltellare e ricadere più volte in un secondo, che respinti continuamente dalle parti vibranti vanno in fine a raccogliersi sopra certe linee che si chiamano linee *nodali*, e che sono quelle che rimangono in riposo e che dividono la superficie come in tante parti vibranti. Queste linee variano di figura secondo che varia la figura della lamina, secondo che sono differenti i punti d'appoggio, secondo il luogo a cui è applicato l'archetto, e secondo il tuono del suono prodotto: quantunque le stesse figure s'ottengano ancora in certi casi anche quando alcuni di questi elementi abbiano variato.

3. Questi sperimenti sono quindi assai proprii per studiare i modi di vibrazione che si possono eccitare nei corpi di diversa specie e figura, e studiare le proprietà connesse colla loro elasticità. Si possono vedere nel trattato d'Acustica di Chladny, in una Memoria di Paradisi nel Tomo I. dell'Istituto d'Italia, in varie memorie di Savart e nel corso di Fisica, che questo dotto professore dava al Collegio di Francia in Parigi (2), le applicazioni di questi processi ad un gran numero di casi, e la deduzione di alcune regole generali. Ma questa materia offre ancora assai campo incolto per essere ridotta ad una teoria meccanica i cui principii siano atti ad essere esposti in un trattato elementare.

4. Non basta che le parti di un corpo siano in uno stato di vibrazione, per poter percepire un suono, è di più necessario che esista fra il corpo sonoro e l'udito una serie non interrotta di corpi elastici capaci di trasmettere le vibrazioni. Si può provare la necessità di questa mediazione, chiudendo in un recipiente, nel

(1) Galileo. Dialogo 1.° di due scienze nuove

(2) Vedasi il Giornale l'Institut, an. 1839, dove questo corso è pubblicato.

quale si fa il vuoto colla macchina pneumatica, una campanella che si fa suonare scuotendola, o per mezzo di qualche meccanismo che comunichi al di fuori. Estraendo l'aria, si ode che il suono va facendosi sempre più debole, e quando il voto è quasi perfetto, per cui la comunicazione fra l'udito e la campanella è quasi interrotta, non si ode più suono alcuno.

5. L'aria è comunemente il veicolo pel quale si trasmette il suono, ma come tutti i corpi tanto liquidi che solidi sono pure compressibili ed elastici e per conseguenza possono entrare in vibrazione, così tutti servono per comunicare il suono, e non differiscono fra loro che per la intensità e velocità con cui lo trasmettono.

Secondo le teorie idrodinamiche, che alcuni esperimenti di Priestley e Perolle e posteriormente di altri hanno confermato, la intensità del suono trasmesso, in circostanze eguali, da differenti fluidi aeriformi è proporzionale alla loro densità.

6. Il suono non si trasmette istantaneamente dal corpo sonoro a qualunque punto dello spazio. Se si osserva il tiro di un cannone o di un fucile si vede la fiamma prodotta dall'esplosione della polvere prima che si senta il rumore del tiro. La trasmissione della luce è tanto rapida che in tutte le distanze terrestri si può considerare come istantanea. L'intervallo di tempo che passa fra il momento in che si vede la fiamma, e quello in cui si ode il rumore può dunque prendersi pel tempo che il suono impiega per arrivare dal luogo del cannone a quello dell'osservatore.

Gli Accademici del Cimento eseguirono i primi esperimenti di questo genere fatti con esattezza, e trovarono che la propagazione del suono è uniforme, cioè che il suono giunge successivamente a distanze proporzionali al tempo decorso dall'istante in cui fu prodotto. (1) Dopo, questi sperimenti furono ripetuti da molti fisici. Quelli più moderni fatti con maggiori precauzioni danno per la velocità del suono in un secondo di tempo, supponendo l'aria ben

(1) Saggi di Naturali esperienze, Cap. XI.

Il Sig. Cav. Antinori nelle eccellenti *Notizie istoriche relative all'Accademia del Cimento* premesse alla nuova edizione dei Saggi destinata dal Serenissimo attuale Gran Duca Leopoldo II. in dono agli Scienziati Italiani formanti la 3.ª Riunione in Firenze, ha riferito una lettera interessante del Viviani in cui è descritto il metodo d'esperimentare sulla velocità del suono praticato dagli Accademici del Cimento, che, come osserva il detto Signore, onora l'ingegno di quegli sperimentatori, essendo lo stesso di quello che tant'anni dopo hanno seguito gli altri Fisici ottenendone i medesimi risultamenti.

secca e la sua temperatura a zero o al punto dello scioglimento del ghiaccio, i seguenti risultamenti.

Thurry, Maraldi, Lacaille	333,^{m}45
Sig. Benzenberg.	333, 74
Sig. Stumpfer e Myrbach	333, 25
Sig. Parry e Foster	333, 15
Sig. Moll e Van-Bick.	332, 05
Sig. Prony, Arago, Mathieu, Humboldt, Gay-Lussac .	330, 52
Medio .	332, 69

7. La formola che somministra la teoria per la velocità di propagazione del suono in un mezzo aeriforme omogeneo è, (Vedasi la Nota I)

$$(1) \qquad v = \sqrt{(1+\gamma)\frac{p}{d}}$$

nella quale $1+\gamma$ dinota, come nell' articolo 14 della Lezione XIX la ragione dei calori specifici a pressione ed a volume costante, p la forza espansiva del gas, o la pressione equivalente a cui è sottoposto, e d la sua densità.

Per l' aria atmosferica, quando esistesse in esso una certa quantità di vapore, la formola superiore si trasforma nella seguente

$$(2) \qquad v = \sqrt{(1+\gamma)\,G\,\frac{0^m76\,.\,10466{,}82\,(1+\varepsilon t)}{1-\frac{3}{8}\frac{\Upsilon}{H}}}$$

dove ε e t denotano come all' articolo 8 della Lezione XVIII il coefficiente di dilatazione dell' aria pel calore e la temperatura contata dal disgelo, $\frac{\Upsilon}{H}$ la tensione del vapor acqueo esistente nell' atmosfera, H l' altezza barometrica, e $G=9^m{,}80594$ il valore della gravità terrestre alla latitudine di 45°.

Quando la temperatura fosse zero e l' aria ben secca, la premessa formola si riduce a

$$(3) \qquad v = \sqrt{(1+\gamma)\,.\,9^m{,}80594\,.\,0^m{,}76\,.\,10466{,}82}$$

la quale deve dare per v lo stesso valore della velocità di propagazione del suono risultante dagli esperimenti che abbiamo riferito nell' articolo precedente.

Prima di Laplace si considerava che la temperatura dell'aria rimaneva inalterabile durante la propagazione del suono, e quindi si supponeva, secondo la legge di Boyle o Mariotte, che le densità fossero proporzionali alle pressioni, per cui nella formola precedente non veniva introdotto il fattore $1+\gamma$, e la velocità data dalla teoria era inconciliabile con quella data dall'esperienza che si trovava circa di un quinto maggiore. Quel filosofo fece osservare che nelle piccole compressioni e dilatazioni, che si producono nell'aria al trasmettersi delle vibrazioni sonore, deve succedere uno sviluppo ed un assorbimento di calorico, che nella brevissima durata della vibrazione non ha tempo d'essere dissipato o rimpiazzato; e quindi che non si doveva far uso della relazione fra le pressioni e le densità data dalla legge di Boyle o Mariotte, ma sì bene di quella data dalla formola che abbiamo esposto all'articolo 14 della Lezione XIX. Coll'uso di questa formola, e di un'altra data la prima volta da Lagrange (1) si è ottenuto per la velocità di propagazione del suono, v, l'espressione che abbiamo segnato (1).

Invertendo il problema dall'equazione (3), si deduce

$$1+\gamma=\frac{v^2}{9^m,80594\,.\,0^m,76\,.\,10466,82};$$

dalla quale sostituendo per v il medio valore dedotto dagli esperimenti riferiti alla fine dell'articolo precedente si ottiene

$$1+\gamma=1,419 \quad ; \quad \gamma=0,419 \qquad (2).$$

Questo valore di γ non concorda esattamente con quello che si è trovato con alcune esperienze dirette che abbiamo riferite nella Nota II alla Lezione XIX: ma come gli si avvicina bastantemente, conferma la verità del principio di Laplace: e questo principio essendo ammesso il valore precedente di γ deve considerarsi più esatto; perchè le esperienze sulla velocità del suono sono suscettibili di maggior precisione che non le esperienze citate nella detta Nota. Si è così trovato nella propagazione del suono il mezzo migliore di risolvere una questione concernente i calori specifici dei gas.

8. In temperature eguali la velocità del suono è sensibilmente la stessa sia il suono debole o forte, d'un tuono più o meno acuto,

(1) Vedansi le Miscell. Taurin. Tomo II, pag, 152, e la Nota I.

(2) Il valore $\gamma=0,421$ adottato comunemente risulta dall'assumere per la velocità v di propagazione del suono 333^m in numeri interi.

d'una specie o di un'altra, ovvero sia il tempo nuvoloso o sereno di giorno o di notte, purchè lo stato igrometrico sia lo stesso, e l'aria si trovi in riposo. Però se l'aria avesse un movimento, la velocità del vento, decomposta secondo la direzione delle linee in cui si propaga il suono, aumenta o diminuisce di tutto il suo valore la velocità di propagazione del suono secondo che le è favorevole o contraria.

Per tener conto della variazione della velocità del suono a diverse temperature bisogna, secondo la formola (2) moltiplicare la velocità corrispondente alla temperatura zero, data dalla formola (3), per la radice della ragione in cui aumenta l'elasticità dell'aria passando dalla temperatura zero alla temperatura esistente, o sia per $\sqrt{1 + 0,00375\,t}$, e per tener conto del vapor acqueo esistente nell'atmosfera bisogna dividere la stessa velocità per $\sqrt{1 - \frac{3}{8}\frac{T}{H}}$.

9. La cognizione della velocità di propagazione del suono può impiegarsi utilmente in alcuni casi per determinare le distanze, se non con molta esattezza almeno con poca differenza dalla verità. Così all'avvicinarsi di una nube tempestosa possiamo giudicare della sua distanza osservando il tempo che passa fra l'istante nel quale si vede il fulmine e quello nel quale si ode il tuono. Questo intervallo di tempo farà conoscere la distanza della nube valutandola all'incirca in ragione di 333 metri per secondo.

10. La velocità colla quale si propaga il suono in differenti corpi o veicoli è molto diversa. Se si dà un colpo in una estremità di una lunga fila di tubi metallici, come per esempio in una estremità di un lungo acquedotto, siccome ha esperimentato il Sig. Biot, si sentono nell'altra estremità due colpi, uno trasmesso prima dal metallo, l'altro dopo dall'aria. Con questo mezzo lo stesso fisico ha riconosciuto che in una linea di 957 metri di tubi di metallo fuso, il suono lungo i tubi arrivava all'altra estremità in un tempo dieci volte e mezzo più breve che per l'aria, e quindi che la velocità del suono nel metallo fuso è 10 ½ maggiore che nell'aria. Questo risultamento non può essere che approssimato perchè, come osservò il Sig. Savart, i gomiti dei tubi e le rotelle di cuoio che servono a riunirli per formare l'acquedotto devono avere un'influenza sensibile sulla trasmissione del suono. Per altri mezzi, di cui accenneremo il principio in seguito, Savart è riuscito a riconoscere che le velocità, colle quali si trasmetterebbe il suono nelle sostanze sotto indicate espresse in multipli

delle velocità del suono nell'aria, presa per unità, sono date dai seguenti numeri.

Ottone	10,40	Cristallo	16,05
Rame	11,13	Vetro comune . .	12,12
Ferro	15,03	Idem	13,39
Acciajo tenero . .	15,10	Vetro in tubi . .	12,45
Acciajo fuso . . .	15,03	Vetro	11,86
Abete del Volges .	16,54	Idem	16,26
Abete del Nord . .	16,39	Idem	11,00(1)
		Idem	16,39

11. I signori Colladon e Sturm eseguirono sul lago di Ginevra alcuni sperimenti per determinare la velocità di propagazione del suono nell'acqua, e la trovarono eguale a 1435 metri per secondo. La temperatura era circa di 8°,1 centigradi, e supponendo che per pressione equivalente al peso di un'atmosfera la compressione dell'acqua sia eguale a 0,0000495, la velocità calcolata secondo un principio messo in campo da Young e Laplace sarebbe di 1428. Vedasi la Nota II.

12. Il suono si sente tanto più debole quanto si è più lontani del luogo dove è stato eccitato: questo è sempre vero ogni qual volta il suono possa diffondersi da tutte le parti, perchè i tremiti comunicati alle prime particelle dell'aria vanno diventando più deboli a misura che si propagano sfericamente e si comunicano ad un maggior numero di particelle, e per conseguenza l'intensità del suono che dipende dalla grandezza di questi tremiti viene ad essere minore. Per mezzo di considerazioni geometriche si dimostra che le velocità dei tremiti diminuiscono in ragione diretta delle distanze, e quindi adottando, come è ragionevole, per misura dell'intensità del suono la forza viva dell'impulso sul timpano, o sia una quantità proporzionale al quadrato della velocità, essa deve decrescere come il quadrato delle distanze, il che l'esperienza conferma. Vedasi la Nota III.

13. Lo stesso non succede se il suono si propaga in una massa d'aria di forma cilindrica. Il Sig. Biot fece l'esperimento nei tubi degli acquedotti di Parigi, sopra una colonna d'aria della lunghezza di 951 metri. La voce la più bassa era udita a questa distanza in modo da poter distinguere perfettamente le parole, e

(1) In questo vetro entrava dell'ossido di piombo.

mantenere una conversazione. Ho voluto, dice questo fisico, determinare il grado in cui la voce cessava di essere sensibile, ma non vi sono riuscito. Le parole profferite così bassamente come quando si parla all'orecchio erano percepite ed intese, talchè per fare che non si sentisse, non v'era altro modo che quello di non parlare affatto.

14. Se si eccita un rumore od un suono, o si parla fortemente in faccia di un ostacolo, come un edificio od una rocca situata a qualche distanza si sente una ripetizione delle parole, il qual fenomeno si chiama un *eco*. Questo fenomeno si percepisce con maggior distinzione stando in tal situazione che conducendo due linee rette, una dal luogo dove il suono è stato prodotto all'ostacolo, e l'altra da questo al luogo dove l'eco si sente, queste due linee fanno colla perpendicolare alla superficie dell'ostacolo due angoli eguali. Così, se esiste un piano $P P_1$ (Fig. 1) in un campo aperto e che nel luogo L ad una certa distanza da questo piano si eccita un suono, l'eco è più sensibilmente udito nella direzione $I Q$ che fa colla perpendicolare $I O$ al piano $P P_1$ un angolo $Q I O$ eguale ad $L I O$. Cioè la direzione dove si sente l'eco è quella stessa in cui sarebbe riflessa una palla di bigliardo che andasse ad urtare la sponda $P P_1$. L'angolo $O I L$ che fa la retta $L I$, che segna la direzione L in cui il suono è stato eccitato, colla perpendicolare $I O$ al piano $P P_1$ si chiama angolo d'*incidenza*, e l'angolo eguale $O I Q$ che marca la direzione in cui si sente l'eco si dice angolo di *riflessione*, e la legge precedente si esprime dicendo che il suono si riflette da un'ostacolo facendo l'angolo d'incidenza eguale all'angolo di riflessione. Conviene però osservare che come il suono si spande anche lateralmente, questa legge non indica che la direzione lungo la quale l'eco è più sensibile. Non è necessario che la superficie riflettente $P I P_1$ sia solida, se fosse anche aeriforme, ma di una densità maggiore, parte del suono continuerebbe a propagarsi nella direzione $L I$, e parte sarebbe riflessa colla legge suddetta nella direzione $I O$. Così è che in mare si ode talvolta l'eco prodotto da una nube, ed ancor meglio quello che producono le vele d'un altro bastimento quando sono ben tese dal vento. Il Sig. Humboldt spiega colle moltiplici riflessioni prodotte dalla diversità delle colonne aeree ascendenti e discendenti che esistono nell'atmosfera durante l'azione del sole, la causa per cui i rumori sono poco intesi in lontananza di giorno, e si odono a grandissime distanze di notte. Anche una semplice discontinuità nella forma della massa aerea basta per occasionare un eco; così in una colonna aerea che

sbocchi nell' atmosfera libera, in una lunga galleria, per esempio, si ode un eco il quale è prodotto alle sue estremità dalle superficie contigue all' aria esterna, che in questo caso prendono il nome di *ventri* per una ragione che si vedrà in appresso.

Dipende in gran parte dal principio che abbiamo esposto che le pareti e le volte di alcune sale od edifizi *parlanti*, sono atte a trasmetterci il suono in modo che due persone situate nelle estremità possono conversare fra loro, senza che le altre persone presenti che stanno nel mezzo possano sentirle. La tromba acustica, il porta-voce ec. sono pure tutti stromenti la cui costruzione è principalmente diretta dallo stesso principio.

15. Gli echi multipli sono quelli nella quale la stessa voce si ode ripetuta molte volte. Vicino a Milano, per esempio, esiste una villa chiamata la Simonetta nella quale una parola si ode ripetuta un gran numero di volte, che in tempo di notte giunge sino a quello di 40. Questo fenomeno non è altro che lo stesso eco riprodotto da due o più superficie convenevolmente disposte che si rimandano l' una all' altra le onde sonore che vanno ad urtarle. Se si dinotano con a e b le distanze dell' esperimentatore dalle due superficie, con x la distanza del medesimo al luogo dove il suono è stato eccitato, che supporremo dalla parte ove è situata la superficie alla distanza a, e con v la velocità di propagazione del suono, è facile di verificare che, contando il tempo dall' istante in cui il suono è stato eccitato, quando tutti i suddetti luoghi fossero in linea retta, l' esperimentatore udirebbe il suono diretto ed i successivi echi nei tempi espressi dalle formole seguenti

$$\frac{x}{v}$$

$$\frac{2a-x}{v} \qquad \frac{2b+x}{v}$$

$$\frac{2a-x}{v}+\frac{2b}{v} \qquad \frac{2b+x}{v}+\frac{2a}{v}$$

$$\frac{2a-x}{v}+\frac{2b}{v}+\frac{2a}{v} \qquad \frac{ab+x}{v}+\frac{2a}{v}+\frac{2b}{v}$$

$$\frac{2a-x}{v}+\frac{2b}{v}+\frac{2a}{v}+\frac{2b}{v} \qquad \frac{2b+x}{v}+\frac{2a}{v}+\frac{2b}{v}+\frac{2a}{v}$$

ec. ec.;

gli echi di ciascuna delle due serie succedendosi alternativamente

agli intervalli $\frac{2a}{v}$ e $\frac{2b}{v}$. È necessario onde tutti questi echi siano discernibili che le distanze a, b, x siano tali che l'intervallo di tempo fra due qualunque di essi risulti minore di $\frac{1}{10}$ di secondo, sapendosi per esperienza che l'udito confonde i suoni che si succedono a minor intervallo.

LEZIONE XXI.

Dei suoni in quanto sono suscettibili di valor musicale.

1. Le proprietà del suono che abbiamo esposto nella precedente Lezione appartengono tanto a ciò che si chiama semplicemente un rumore, quanto al suono propriamente detto, cioè quando è suscettibile di armonia e valor musicale. Andiamo ora a considerare i caratteri che distinguono i suoni.

Già abbiamo fatto osservare che un suono od un rumore non mai si produce senza che un corpo eseguisca delle vibrazioni. Supponiamo adunque che SS (Fig. 2) rappresenti una superficie vibrante posta all'estremità di una colonna aerea che si estenda indefinitamente dall'altra parte, ed esaminiamo gli effetti che sopra questa risultano dalle pulsazioni della superficie. Sia SS' la lunghezza di una escursione della superficie, e T il tempo che impiega a passare da S in S'. Lo spazio SS' deve essere assai piccolo, e quasi impercettibile, ed il tempo T brevissimo, ma nella figura abbiamo dato al primo una lunghezza sensibile onde poter eseguire di un modo visibile le costruzioni che ci abbisognano. Dividiamo il tempo T in tante parti molto piccole od istanti, in ciascuno dei quali possasi concepire che la superficie vibrante avanzandosi comunichi un nuovo urto alle particelle aeree che le sono contigue. Per mezzo del calcolo fondato sui principii di meccanica si dimostra, che il tremito comunicato dal primo urto alle particelle aeree in contatto colla superficie vibrante non agita queste particole che per un momento, dopo le abbandona alla quiete e passa avanti ad agitare le particole seguenti, che lascia pure tornare al loro stato di densità e quiete primitiva nell'istante seguente; e così va percorrendo colla velocità del suono la colonna aerea, di modo che alla fine del tempo T sta commuovendo le particelle che si trovano in O distanti da SS dello spazio che il suono può percorrere in questo tempo (1). Ciascuno degli impulsi comunicati dalla superficie vibrante negli istanti successivi si propaga nello stesso modo, agita successivamente e per un solo istante le particelle che vengono abbandonate

(1) Vedansi le proposizioni XLVII, XLIX del secondo libro *Philosophiae naturalis Principia mathematica* cogli schiarimenti di Lagrange nelle Memorie dell'Accademia di Berlino per l'anno 1786. L'articolo 14 della sezione XII della seconda parte de la *Mécanique analytique*, e la Nota I della Lezione precedente.

dal tremito prodotto dall' impulso precedente, ed arriva alla fine del tempo T a scuotere le particelle situate ad una distanza intermedia O ed $S S$ proporzionale al tempo decorso dall' istante in cui quell' impulso è partito dalla superficie vibrante. Finalmente le particelle aeree in N riceveranno l' ultimo impulso nell' atto che la superficie sonora terminerà la sua vibrazione in $S'S'$. La serie delle particelle agitate da N sino ad O forma ciò che si chiama una *onda sonora*. I tremiti nelle estremità O ed N sono più deboli, perchè la velocità della superficie vibrante comincia a crearsi, e sta per estinguersi negli istanti che gli ha generati, ed i tremiti delle particelle nel mezzo dell' onda sonora sono per lo contrario i più forti, perchè la velocità della superficie vibrante è massima alla metà della vibrazione. Per dare un' idea sensibile dell' onda sonora la rappresenteremo colla curva $O R Q P N$ (Fig. 3), le ordinate $2 R$, $1 Q$, $2 P$ crescendo o diminuendo come le grandezze dei tremiti corrispondenti alle particelle nelle sezioni 2, 1, 2 dell' onda sonora. La *lunghezza totale dell' onda sonora sarà eguale*, come già abbiamo osservato, *allo spazio che corre il suono durante la vibrazione che l' ha prodotto, meno il piccolo intervallo $S S'$ dell' escursione della superficie*, che è generalmente trascurabile.

La superficie sonora eseguisce le sue vibrazioni passando avanti ed indietro della sua situazione d' equilibrio $s s$. Quando la superficie fa un movimento in avanti, i tremiti che occasiona spingono le particelle contro quelle che stanno innanzi, esse si comprimono reciprocamente, e l' onda che si produce è di condensazione. Quando la superficie torna indietro, i tremiti sono causati dalle dilatazioni istantanee delle particelle aeree che si trasportano verso lo spazio che la superficie vibrante abbandona, e l' onda che risulta è di rarefazione. Rappresentiamo (Fig. 4) una onda di questa seconda specie con una linea $O' T U V N$ convessa per abbasso per indicare che i tremiti producono effetti contrarii all' onda di condensazione $O R Q P O'$; la serie delle onde alternative prodotte dalle vibrazioni successive che fa la superficie sonora potranno essere rappresentate dalla linea serpeggiante (Fig. 5) $N Z O' Y O'' X O''' U O''''$ ec. che va estendendosi indefinitamente lungo l' asse della colonna aerea. È da notarsi che i tremiti che si comunicano dalla superficie vibrante, crescendo di grandezza sino alla metà della vibrazione e poi decrescendo successivamente, anche le condensazioni o rarefazioni delle parti della colonna aerea agitata dagli stessi tremiti crescono o calano colla stessa legge, e che tutte le parti della colonna aerea si trovano successivamente alla fine della loro rispettiva vibrazione

trasportate avanti od indietro della lunghezza SS' dell'escursione della superficie vibrante. Eulero ha dimostrato pel primo (1), che proviene dal detto rapporto di proporzionalità che i tremiti, che agitano in un'istante le molecole in un punto della colonna aerea, non si propaghino anche per indietro, e che il suono cessi immediatamente tosto che la superficie vibrante si arresta; ciò che non potrebbe succedere se le velocità dei tremiti, che animano le diverse parti di una stessa onda, e le condensazioni o rarefazioni rispettive fossero in un rapporto qualunque. Un tremito eccitato a caso in un punto di una colonna aerea deve generalmente propagarsi tanto da un lato che dall'altro della colonna stessa.

2. Ora è facile intendere in che consiste la causa per cui un suono si distingue da un rumore. Nel principio della lezione precedente abbiamo visto che le vibrazioni che eseguiscono i corpi elastici, come le corde, o lamine metalliche sono tali che sempre si compiono in egual tempo siano più o meno estese. Le onde successive generate nell'aria dalle vibrazioni di questi corpi saranno dunque, secondo il principio che abbiamo esposto, tutte di eguale lunghezza e produrranno sull'organo dell'udito delle pulsazioni periodiche ed equidistanti. In questo caso la sensazione risultante è quella di un suono con un tuono apprezzabile proprio per la musica. Il suono sarà più o meno forte secondo che le vibrazioni della superficie sonora saranno più o meno estese, e le velocità che si trasmettono alle particelle aeree più o meno grandi, ma le ondulazioni della colonna d'aria venendo ciò non ostante, come abbiamo detto, ad essere tutte d'eguale lunghezza e d'eguale durata, il tuono rimarrà lo stesso. Se le escursioni che eseguisce la superficie vibrante si compiono in tempi ineguali, per qualche causa perturbatrice, o non durano che per un tempo troppo corto, le onde risultano pure di lunghezze ineguali, fanno tremare il timpano ad intervalli ineguali di tempo, o per un tempo non sufficiente per apprezzare il loro isocronismo, e la sensazione è quella di un rumore incapace di servire per la musica.

3. Un sentimento di gusto probabilmente dipendente dalla organizzazione dell'udito umano, ha fatto adottare comunemente sette intervalli che regolano tutte le voci delle quali si fa uso nella musica. Questi intervalli sono quelli pei quali progredisce la voce quando i musici intonano le note alle quali si dà il nome di

(1) Mémoires de l'Académie de Berlin. Année MDCCLIX, Tom. XV, pag. 201 et suiv., et année MDCCLXV, Tom. XXI, pag. 335.

do, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si*, *do*

La progressione di queste otto voci si chiama la *scala diatonica*. La prima nota si chiama la *chiave* o *fondamentale del tono* e le altre prendono rispettivamente i nomi di *seconda*, *terza*, *quarta*, *quinta*, *sesta*, *settima ed ottava*.

Il passaggio d'una ad altra voce della scala diatonica si distingue per una qualità che dinotiamo dicendo, che la precedente è più grave, o bassa della seguente, e la seguente è più acuta od alta. Se si intonano con un piano forte, od altro istrumento, due voci ad un tempo, ciò che si dice fare un *accordo*, si nota che gli accordi della chiave e della ottava, della chiave e della quinta, della chiave e della quarta producono una sensazione aggradevole che si chiama una *consonanza*, mentre gli accordi della chiave e della seconda, della chiave e della settima cagionano una sensazione poco aggradevole che si chiama una *dissonanza*. Le circostanze fisiche, che fanno sì che un suono sia più grave od acuto, e quelle che determinano una consonanza o dissonanza sono restate per molto tempo incognite. Jamblico riferisce che Pitagora, passando da una officina di fabbriferrai che stavano battendo sopra un'incudine, notò che i suoni avevano fra loro le relazioni come la chiave, la quarta, la quinta e la ottava, e pesando i martelli trovò che i loro pesi stavano fra loro come 1 a $\frac{4}{3}$ a $\frac{3}{2}$ a 2. Tosto che fu tornato a casa sperimentò i suoni, che dava una corda stirata successivamente da pesi nella stessa proporzione di quelli dei martelli, ed osservò che risultavano gli stessi intervalli musicali. Però tutto questo racconto ha apparenza di falsità ed ignoranza. I suoni, che dà un'incudine, non hanno una tale relazione coi pesi dei martelli, nè una corda alla quale siano attaccati dei pesi nelle proporzioni suddette produce i suoni riferiti. Ciò che pare avere scoperto Pitagora si è che, se due corde simili sono tese da pesi eguali, e che una d'esse sia la metà in lunghezza dell'altra, la più corta suona la ottava della nota della più lunga. Se la più corta non è che due terzi della più lunga suona la quinta, e se tre quarti suona la quarta. La ragione di 2 : 1 si chiamò la ragione della *Diapason*, quella di 3 : 2 si chiamò *diapente*, e quella di 4 : 3 *diatessaron*. Come Pitagora era molto inclinato a trovare la spiegazione di tutti i principii naturali nelle proprietà dei numeri, diede per ragione delle consonanze degli accordi, che abbiamo citato, la semplicità delle ragioni che regnano tra le lunghezze delle corde che le producono.

4. Questa spiegazione fu adottata per molto tempo fino a che Galileo mostrò la sua insufficienza. Questo filosofo osservò che vi sono tre modi per fare che il suono di una corda sia più acuto (1). Uno è di accorciarla, l'altro di tirarla con più forza, il terzo di assottigliarla o diminuire il suo peso. Ora se si vuole che una corda suoni la ottava, questo si può ottenere tanto con accorciarla della metà, come collo stirarla con un peso quadruplo, o con ridurla al quarto del suo peso. Non v'è dunque nessuna ragione per attribuire la forma della ottava alla ragione di 2 : 1 corrispondente alle lunghezze, che a quelle di 4 : 1 o di 1 : 4 relative alle tensioni o ai pesi. Lo stesso si deve dire degli altri accordi musicali per ottenere i quali è sempre necessario che le tensioni o pesi varino le prime direttamente ed i secondi inversamente come i quadrati, e le lunghezze come le potenze semplici. La gravità od acutezza dei suoni, disse Galileo, dipende dal minor o maggior numero di vibrazioni che fanno in egual tempo i corpi che li producono. Le vibrazioni generano un numero corrispondente di onde sonore, e queste altrettanti urti che feriscono il timpano e le altre parti dell'orecchio, e le fanno tremare con periodi di tempo nella stessa proporzione. Quando questi periodi sono più brevi l'udito giudica i suoni più acuti, e quando i periodi di due suoni sono eguali, o hanno fra loro una proporzione espressa da numeri semplici, l'udito trova i suoni unisoni nel primo, e consonanti nel secondo, quantunque di metalli differenti come sarebbe il suono di una canna d'organo e quello di un violino. Questa spiegazione di Galileo completò la teorica di Pitagora con farci conoscere il vero principio in cui si fonda l'armonia, di modo che tutto ciò che concerne questa parte della musica sta ora sotto il dominio delle matematiche.

5. Ancorchè, quando le lunghezze delle onde di due suoni siano eguali, si abbia la sensazione di uno stesso tuono, è chiaro che la natura di questi suoni deve anche in gran parte dipendere dalla scala con cui crescono e decrescono le velocità dei tremiti delle particelle aeree che formano le rispettive onde, cioè dalla legge con cui variano le ordinate che determinano la forma o figura della curva $NVUTO'PQRO$ (Fig. 4) da cui l'onda è rappresentata. È assai probabile che a questa variabilità di legge nella scala delle velocità delle diverse parti delle onde respettive di due suoni, che hanno lo stesso tuono, ma che sono prodotti da stromenti diversi,

(1) Vedi il Dialogo primo di Galileo intorno a due scienze nuove, pag. 540, 541 ec. Edizione di Firenze 1713.

sia dovuta quella disparità che scorgiamo fra essi, di cui abbiamo testè fatto cenno, che noi distinguiamo col nome di *metallo*, ed i francesi con quello di *timbre*.

6. La Fisica matematica cominciava a crearsi pei lavori dello stesso Galileo, ed il calcolo del numero delle vibrazioni che eseguisce una corda o qualunque altro corpo sonoro, non meno che quello della propagazione delle onde sonore nell'aria erano problemi troppo difficili per quel tempo, di modo che Galileo non potè offrire che alcuni indizii sperimentali della verità del principio che il suo genio aveva indovinato. Taylor, Newton, Daniele Bernoulli risolvettero in seguito questi problemi. La formola di Taylor (1) che dà il tempo t della vibrazione di una corda, cioè l'intervallo di tempo, in cui la corda passa da una situazione estrema all'opposta, è

$$t = \sqrt{\frac{pl}{gf}}.$$

dove p dinota il peso della corda, l la sua lunghezza, f la forza di tensione o il peso che la mantiene tesa, e g la forza di gravità nell'unità di tempo. La corda essendo stata supposta cilindrica ed omogenea il suo peso è proporzionale alla lunghezza, e si ha $p = \varpi l$, ϖ dinotando il peso di una porzione della corda eguale all'unità di lunghezza, e sostituendo questo valore di p risulta

$$t = l\sqrt{\frac{\varpi}{gf}}.$$

7. Per mezzo di questa formola e di un monocordo, che non è altro che una cassa armonica di legno sopra la quale sia stata estesa una corda omogenea, di cui si possono cambiare le lunghezze e le tensioni, si può provare la realtà del principio di Galileo. Per quest'oggetto si comincia a ridurre con una tensione proporzionata la corda ad essere unisona con un *do* di un istrumento di musica, dopo lasciando la tensione costante si varia successivamente la lunghezza sino a che si ottengano una dopo l'altra le sette voci della scala diatonica. Misurando le lunghezze alle quali è stata ridotta la corda per ciascuna delle otto voci si trova, che rappresentando con uno la lunghezza corrispondente al primo *do*, le altre sono rispettivamente espresse dai numeri seguenti

(1) Methodus incrementorum directa et inversa. Auctore Brook Taylor. Lond. 1715.

do	re	mi	fa	sol	la	si	do
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$.

Ora la formola surriferita di Taylor facendoci vedere che il tempo t di una vibrazione della corda è proporzionale alla sua lunghezza, il numero n di vibrazioni ch'essa effettuerà in un tempo T, espresso da $n = \frac{T}{t}$, sarà inversamente proporzionale alla stessa lunghezza. Quindi i numeri delle vibrazioni che la corda del monocordo, ridotta successivamente alle lunghezze notate nella serie precedente, avrà effettuato in egual tempo in ciascun esperimento, staranno fra loro nelle ragioni seguenti

do	re	mi	fa	sol	la	si	do
1,	$\frac{9}{8}$,	$\frac{5}{4}$,	$\frac{4}{3}$,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{5}{3}$,	$\frac{15}{8}$,	2:

ciò che pone in evidenza il principio di Galileo. Gli accordi consonanti della chiave con la ottava, con la quinta, colla quarta sono quelli nei quali le vibrazioni stanno fra loro nelle ragioni semplici di 1 : 2, 2 : 3, 3 : 4 ec.; e gli accordi dissonanti, come quelli della chiave con la seconda, della chiave colla settima, sono quelli in cui le vibrazioni fatte in egual tempo stanno nelle ragioni più complicate di 8 : 9, di 8 : 15.

I musici non limitano ad otto le voci che impiegano nelle loro composizioni, ma replicano successivamente il primo periodo della scala diatonica con voci il cui numero di vibrazioni è rispettivamente un multiplo della potenza di due della voce corrispondente nel primo periodo, di modo che i numeri delle vibrazioni dei periodi successivi hanno fra loro le ragioni delle serie seguenti

do	re	mi	fa	sol	la	si	do
2	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}$	3	$\frac{10}{3}$	$\frac{15}{4}$	4
4	$\frac{9}{2}$	5	$\frac{16}{3}$	6	$\frac{20}{3}$	$\frac{15}{2}$	8
8	9	10	$\frac{32}{3}$	12	$\frac{40}{3}$	15	16
ec.	ec.	ec.	ec.	ec.	ec.	ec.	ec.

Ciascun periodo si chiama una ottava, e le voci hanno rispettivamente in ciascuna ottava lo stesso nome. Comunemente si fa uso di sei ottave, e qualche rara volta di otto.

8. Le serie che abbiamo ora date, fanno conoscere le relazioni in cui stanno fra loro i numeri delle vibrazioni delle rispettive voci con quello della chiave o fondamentale del tono, che abbiamo rappresentato con uno; ma ci manca ancora a conoscere il numero

assoluto delle vibrazioni che esse fanno, o almeno quello che fa una di esse, per dedurre colle proporzioni date tutte le altre.

Varii metodi possono impiegarsi per questo oggetto. La formola di Taylor può darci questo numero, quando si conosca il peso della corda, il peso che la tende, la sua lunghezza ed il tuono. Il Sig. Chladni impiegò invece in un modo analogo delle lamine elastiche Vedansi le Note I. II.

9. Da poco tempo il Sig. Cagniard Latour immaginò un istromento che egli chiamò la *sirena*, che è di un uso generale e comodo per far conoscere il numero delle vibrazioni date da qualunque suono. Il principio di questo strumento consiste nell'aprire e chiudere un gran numero di volte, in un secondo di tempo, un foro, dal quale spira una corrente d'aria che viene da un mantice, che si fa per tal modo vibrare mentre esce dal foro. Sia *A B* (Fig. 6) un piano circolare, o piano superiore di una cassa che comunichi inferiormente per mezzo di un cannello con un mantice, nel quale piano sia praticata una serie circolare di fori equidistanti, dai quali possa soffiare l'aria che proviene dal mantice. Supponiamo che un altro disco *D E* concentrico sia sovrapposto al piano circolare *A B* e possa girare rapidamente intorno ad un asse che passi pel centro *C*. Il disco *D E* abbia un egual numero di fori posti alla stessa distanza dal centro di quelli del piano circolare *A B*, talchè il disco girando apra e chiuda successivamente tutti questi fori assieme. Un congegno facile a concepirsi, posto in comunicazione coll'asse del disco *D E*, nota sopra un quadrante il numero delle rivoluzioni che fa il disco.

Per intendere il giuoco della sirena immaginiamo per un momento che non vi sia che un foro nel piano, e 14 buchi nel disco. In questo caso il foro del piano verrà aperto e chiuso 14 volte per ogni rivoluzione del disco, e se il disco fa 10, 100 giri ec. in un secondo, l'aria sarà spinta ed arrestata 140, 1400 ec. volte, e come a ciascuna alternativa si produce una vibrazione, farà 280, 2800 ec. vibrazioni per secondo. Così la sirena potrà dare dei suoni il cui tono si farà passare dal più basso al più acuto per gradi insensibili, aumentando progressivamente la velocità della rotazione del disco. Ora in luogo di un sol foro del piano circolare supponiamone 14, come verranno tutti chiusi ed aperti contemporaneamente, il loro effetto non farà che concorrere con quello del primo, soltanto si avrà un suono 14 volte più intenso.

Il processo che si deve seguire per determinare il numero delle vibrazioni dell'aria che corrisponde ad un dato tuono si presenta

da se stesso. Supponiamo d'aver nn corista o un *diapason* come quello di cui si servono i musici per accordare un istromento, e che corrisponde alla nota la_2 della seconda ottava. Si farà aumentare o diminnire la velocità di rotazione del disco della sirena sino a che renda un suono unisono con quello del *diapason*. In questo stato contansi i giri che fa il disco in un dato numero di secondi di tempo, il numero dei giri moltiplicato per 28, e diviso pel numero dei secondi, darà, nel caso della sirena che abbiamo supposto, il nnmero delle vibrazioni in un secondo, che corrisponde alla nota *diapason*. Se si eseguisse l'esperimento si troverebbe che, nel nostro caso, il disco fa 61 rivoluzioni in 4 secondi, onde $\frac{61 \cdot 28}{4}$ eguale a 427 sarà il numero delle vibrazioni che fa la nota la_2 della seconda ottava. La nota do_1 della prima ottava facendo soltanto un numero di vibrazioni espresso da $\frac{3}{10}$ la_2, si troverà pel do_1 il numero 128, 1 di vibrazioni corrispondenti, il che concorda con ciò che danno altri esperimenti.

10. Sommettendo ad alcnni degli esperimenti citati i *diapason*, dei quali si fa uso in diverse orchestre, il Sig. Fischer ha riconosciuto che i diapason dell'orchestra del teatro di Berlino e quelli dei principali teatri di Parigi non sono unisoni, ma che le vibrazioni che fanno in un secondo di tempo sono

	la_2	e quindi do_1	
Per quello del teatro di Berlino	437,32	131,2	vibrazione per secondo
Grande opera Française	431,34	129,4	
Fedeau	427,61	128,3	
Teatro Italiano	424,17	127,3	

11. La voce dell'nomo si estende comunemente dal sol_1 al fa_3, e quella della donna dal re_3 al la_4. Prendendo 128 vibrazioni pel do_1, secondo i rapporti dati nella serie precedente, la voce dell'uomo sarà suscettibile di fare

da 192 vibrazioni per secondo a 683

e quella della donna

da 576 vibrazioni per secondo a 1707.

Questa estensione è quella delle voci che possono emettere ben piene e ben giuste. Una gran parte delle voci delle donne e dei ragazzi, in cui le lamine delle glotte sono molto più corte che nell'uomo, può elevarsi facilmente al di sopra del la_4 e si può senza esagerazione asserire che la loro voce dà tre o quattro mila oscillazioni per secondo.

12. Conoscendo il nnmero delle vibrazioni in un secondo che

corrispondono ad un dato suono si può calcolare la lunghezza delle onde che lo producono. Infatti queste onde, dovendo essere eguali e succedersi in un modo continuo le une alle altre per produrre la sensazione del suono, devono essere in numero tale da riempire la lunghezza dello spazio che il suono percorre in un secondo. Se dunque si divide questo spazio, che nell' aria è, come abbiamo veduto, di 333 metri, circa, pel numero delle vibrazioni corrispondenti al suono dato, il quoziente esprimerà la lunghezza cercata di una delle onde. Si trova così che le onde corrispondenti al suono assai grave, di 33 vibrazioni per secondo, hanno circa la lunghezza di $10^{m},2$ e quelle che corrispondono al suono sommamente acuto, di 16400 vibrazioni, hanno la lunghezza di circa $0^{m},02$, o sia di circa 2 centimetri.

LEZIONE XXII.

Delle vibrazioni di una colonna d'aria, di quelle delle verghe elastiche, dei suoni armonici, delle risonanze e dei battimenti.

1. I principii che abbiamo esposti concernenti l'Acustica aprono il cammino per procedere ad investigare più addentro la natura e le proprietà delle vibrazioni dei corpi sonori, non che quelle della trasmissione, propagazione, e combinazione dei suoni. Queste investigazioni per essere trattate colla precisione, che le attuali teoriche matematiche possono fornire, esigono dei processi di calcolo superiori a quelli che soli ci siamo proposti di impiegare in queste Lezioni elementari. Ci limiteremo perciò ad indicare alcuni dei risultamenti più notabili che i geometri ed i fisici hanno ottenuto, esponendoli in modo che si possa formare un'idea adequata della loro essenza.

Cominciando dal trattare delle vibrazioni dei corpi, mi farò ad esporre il modo con cui vibra l'aria negli stromenti musicali detti da fiato, in cui il corpo sonoro, quello cioè che vibrando eccita il suono, è la stessa colonna d'aria racchiusa nello stromento. L'analisi del modo con cui questa colonna eseguisce le sue vibrazioni in un cannello cilindrico è una delle più eleganti teorie dell'Acustica, e si deve a Daniele Bernoulli. (1)

Per intendere le proprietà delle vibrazioni di una tale colonna immaginiamo che nel cannello cilindrico (Fig. 7) $UN\ NU$, scorra una serie d'onde formate nel modo che abbiamo esposto all'articolo 1 della Lezione precedente. Le onde arrivando al fondo chiuso, NN, del cannello si ripiegheranno indietro, come dimostrano i geometri, conservando gli stessi gradi di velocità e densità delle loro parti, soltanto le velocità cambieranno di direzione.

Se si nota che l'ultima onda, sul fondo chiuso NN, si trova divisa in due parti, una diretta l'altra riflessa, che sono l'una il complemento dell'altra, e che le velocità composte delle particelle della cappa d'aria contigua al fondo devono essere nulle, perchè risultanti da quelle eguali e contrarie nell'onda diretta e nell'on-

(1) Dan. Bernoulli sur le son et sur les tons des tuyaux d'orgues. Mém. de l'Acad. de Paris. 1762.

da riflessa, mentre la densità deve essere doppia di quella che sarebbe, se l'onda non fosse ripiegata su se stessa, si vedrà

1.° Che allontanandosi dal fondo per la lunghezza di uno, di due, di tre ec. ondulazioni si arriverà sempre a delle sezioni $N_1 N_1$, $N_2 N_2$, $N_3 N_3$, ec. in cui l'onda diretta e l'onda riflessa saranno tagliate in parti complementarie, come nel fondo, e nelle quali perciò le velocità delle particelle aeree saranno costantemente nulle, e la densità doppia di quella delle cappe rispettive di ciascuna onda, e queste densità corrisponderanno alternativamente ad una condensazione, e ad una rarefazione. Queste sezioni si chiamano *nodi*.

2.° Che nella sezione $V\,V$ che dista dal fondo di una semiondulazione, le velocità composte delle particelle aeree saranno il doppio di quelle che vi apporta separatamente l'onda diretta o l'onda riflessa, che le due onde saranno ivi costantemente in uno stato opposto, una di condensazione e l'altra di rarefazione o viceversa, e che perciò in questa sezione la densità sarà costante. La stessa costanza di densità si ripeterà nelle sezioni seguenti $V_1 V_1$, $V_2 V_2$ ec. lontane dal fondo per la lunghezza di tre, di cinque, di sette ec. semi-ondulazioni, ma le velocità composte e doppie delle particelle saranno alternativamente dirette verso il fondo e verso la bocca. Queste sezioni si chiamano *ventri*.

Ciò posto supponiamo che il cannello sia appunto di tale lunghezza che la colonna vibrante aerea contenutavi termini alla bocca del cannello in un ventre. In questo caso l'aria conserverà nella bocca del cannello durante le vibrazioni sempre una densità eguale a quella dell'aria atmosferica esteriore, sarà perciò continuamente in equilibrio con essa, e la falda aerea alla bocca non farà che entrare ed escire un tantino dal cannello, cioè vibrerà con tutta la regolarità di una corda o verga, e produrrà un suono. Se per lo contrario le onde eccitate fossero di tale lunghezza che la colonna non terminasse in un ventre, l'equilibrio della falda alla bocca del cannello coll'aria esterna non sussisterebbe continuamente, le onde verrebbero ad ogni istante alterate e confuse, ed il cannello non darebbe che un suono imperfetto poco apprezzabile per la musica.

Da ciò segue dunque che il cannello potrà cominciare a rendere un suono ben distinto, quando la lunghezza dell'onda sia il doppio della lunghezza del cannello, ed il cannello termini nel primo ventre $V\,V$: questo suono sarà il più grave che possa trarsi. Lo stesso cannello renderà poi ancora dei suoni distinti, soffiando

più rapidamente, quando le lunghezze delle onde siano tali che la colonna aerea venga suddivisa da varie ondulazioni, e termini al secondo, al terzo . . ec. ventre, cioè quando le lunghezze delle onde siano $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7} \ldots \frac{2}{2n+1}$ parti di quella del cannello; e queste onde facendo vibrare la falda alla bocca, 3, 5, 7... $2n+1$ volte più spesso, che nel primo caso, i suoni corrispondenti saranno successivamente più acuti, e daranno la quinta della seconda ottava, la terza della terza ottava ec. prendendo per fondamentale la prima voce più grave.

2. Abbiamo supposto che il cannello sia chiuso in una estremità, se fosse aperto nelle due estremità renderebbe ancora dei suoni distinti, ma in questo caso converrebbe che la sezione nella metà del cannello risultasse un nodo. Allora si potrà paragonare ciascuna metà del cannello ad un cannello chiuso in una estremità, il nodo di mezzo facendo funzione di fondo, e converrebbe che alle due estremità aperte del cannello si trovassero due ventri.

Così è facile il vedere che il cannello darà in questo caso il suono più grave quando le onde avranno una lunghezza eguale a quella del cannello, ed i suoni successivi saranno dati da onde, le cui lunghezze siano $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7} \ldots \frac{1}{2n+1}$ di quella del cannello. I suoni in questo caso saranno dunque il doppio più acuti, cioè saranno all'ottava alta di quelli del primo caso; perchè un numero doppio di onde verrà a pulsare nello stesso tempo alla bocca del cannello sull'aria esterna.

3. Se dopo d'aver fatto risuonare un cannello aperto nelle sue estremità in modo che dia, per esempio, il suono più grave, s'introduce da una parte uno stantuffo che otturi il cannello, e si fa progredire questo stantuffo sino alla metà del cannello, il suono più grave, che si otterrà in questo nuovo stato, sarà ancora lo stesso.

L'applicazione di questi principii alla spiegazione dei suoni delle canne d'organo, dei flauti ec. è ovvia, e può vedersi in varii autori (1).

(1) Vedasi la citata Memoria di Dan. Bernoulli.
Observations sur les flûtes par Lambert. Mém. de l'Acad. de Berlin 1775.
Euler. De motu aeris in tubis in nov. Comment. Acad. Petrop. tom. 16
Lagrange. Recherches sur la nature et la propagation du son. Miscellanea Taurinensia. tom. 1 e 2. Giordano Riccati delle corde ovvero fibre elastiche Schediasma, 5. 6. 7.

4. Quest' elegante teoria di Daniele Bernoulli è atta a dischiuderci, per analogia, il meccanismo con cui in generale si opera la propagazione delle vibrazioni longitudinali in tutti i corpi, nei quali si trovano dei punti fissi od impediti nei loro movimenti, od anche delle semplici discontinuità. Essa però non dà, nel caso contemplato delle ondulazioni di una colonna d' aria in un tubo, che la spiegazione del fenomeno astratto, quale sarebbe 1.° se si potesse mettere in vibrazione l' aria all' imboccatura del cannello, ed impedire che l'agitazione estendesse la sua influenza ad una certa parte del cannello: 2.° se le vibrazioni interne potessero essere trasmesse all' aria esterna senza che nascesse una reazione, e quindi una condensazione o rarefazione nelle vicinanze dell' imboccatura: 3.° se il fondo potesse resistere senza partecipare anch' esso alle vibrazioni dell' aria interna, e quindi influenzarle. Per ultimo si suppone che tutte le cappe d' aria, in cui può concepirsi suddivisa la colonna, vibrino parallelamente all'asse del cannello, senza che nascano movimenti obliqui nelle particelle laterali, il che non succede nei modi ordinarii con cui si eccitano le vibrazioni. Tutte queste cause di perturbazione, delle quali il Bernoulli medesimo, Giordano Riccati, Poisson (1), Savart (2) hanno fatto conoscere l' esistenza, danno ragione delle anomalie che si discoprono fra il calcolo e le esperienze, dalle quali risulta che le lunghezze delle onde sono maggiori di quelle che considera la teoria.

5. Malgrado queste difficoltà Dulong è riuscito a fare un' utile applicazione della teoria del Bernoulli, determinando la velocità di propagazione del suono in varii gas, ciò che non sarebbe stato praticabile direttamente, e ne dedusse poi come conseguenza il valore del rapporto dei calori specifici a pressione costante ed a volume costante per ciascuno di essi (3). Seguendo un processo indicato la prima volta dallo stesso Bernoulli, egli osservò che se si fa risuonare una colonna di gas in un tubo aperto in modo che dia, per esempio, il tuono più grave, e poi s' introduce dall' orificio posteriore uno stantuffo che si faccia avanzare gradatamente nel tubo sino a che si riproduca lo stesso suono (art. 3), si trova che quantunque il tubo venga, per le suddette cause d' anomalie, diviso dallo stantuffo in parti disuguali, il punto di questa divi-

(1) Poisson. Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris an. 1818. 1819.

(2) Savart. Recherches sur les vibrations de l'air. Ann. de chim. et phys. an. 1823. 1825.

(3) Dulong. Mém. sur la chaleur spécifique des fluides elastiques. Ann. de chim. et phys. juin. 1829.

sione cade però sempre nello stesso luogo della lunghezza del tubo, qualunque sia il gas che si fa soffiare in esso. Da ciò conchiuse che ogni volta che la lunghezza della colonna vibrante di un gas è la stessa, l'influenza dell'imboccatura e delle altre cause perturbatrici è pure la stessa, benchè la velocità di propagazione delle vibrazioni debba essere più o meno grande secondo che è minore o maggiore il peso specifico o la densità del gas che si soffia, stando la pressione invariabile. (Vedasi la formola (1) dell'art. 7 della Lezione XX). Facendo dunque risuonare uno stesso cannello con diversi gas, tanto quando il cannello è aperto nelle sue estremità, come quando lo stantuffo è arrivato al punto in cui si torna a sentire lo stesso tuono, e paragonando il tuono ottenuto da ciascun gas con quello di una sirena che faccia conoscere il numero corrispondente di vibrazioni, le velocità di propagazione del suono nei varii gas saranno proporzionali al numero delle onde che in un dato tempo scorrono la lunghezza e giungono alla bocca del cannello, o sia al numero delle vibrazioni che corrispondono al tuono rispettivo.

Se dunque si chiama v la velocità di propagazione del suono nell'aria, v' quella di un'altro gas, n il numero di vibrazioni corrispondenti al tuono quando si soffia l'aria nel cannello, ed n' quello corrispondente al tuono prodotto quando si soffia il gas, si dovrà avere

$$v : v' :: n : n'$$

e quindi

$$v' = v \frac{n'}{n} .$$

Adottando per valore della velocità della propagazione del suono nell'aria 333^m, ed impiegando per n ed n' i numeri che hanno dato le esperienze, Dulong ha dedotto dalla formola precedente che, pei gas sotto notati, le velocità di propagazione del suono alla detta temperatura erano come sono date nella tavola annessa

NOME DEI GAS	Densità	Velocità di prop. del suono	Ragione dei cal. specifici
	d	v	$1+\gamma$
Aria.................	1,0000	333,m0	1,421
Gas ossigeno..........	1,1026	317,2	1,415
Idrogeno.............	0,0688	1269,5	1,407
Acido carbonico.......	1,524	261,6	1,3385
Ossido di carbonio.....	0,974	337,4	1,428
Protossido d'azoto......	1,527	261,9	1,343
Oleifico...............	0,981	314,0	1,240

La quarta colonna che abbiamo aggiunto dà i valori della ragione del calore specifico a pressione costante al calore specifico a volume costante per ciascuno dei gas notati, ed è stata costrutta teoricamente colla formola che esprime la velocità del suono nei mezzi omogenei, assumendo che la detta ragione sia espressa da 1,421 per l'aria atmosferica, come risulta dalle esperienze sulla propagazione del suono riferite all'articolo 7 della Lezione XX. Supposto che la pressione p sia la stessa per l'aria e pel gas, e che amendue siano stati ben privati d'ogni vapore acqueo, le formole (1) e (3) del citato articolo ci mostrano che la velocità di propagazione del suono, v, nell'aria, e quella, v', di un altro gas devono stare nella proporzione

$$v : v' :: \sqrt{\frac{1,421}{1}} : \sqrt{\frac{1+\gamma}{d}};$$

$1+\gamma$ dinotando la ragione dei due calori specifici del gas, e d la sua densità, il cui valore, quando le pressioni e le temperature siano eguali, come le suppongono i dati della tavola precedente, vien rappresentato dallo stesso peso specifico del gas espresso in parti di quello dell'aria assunto per unità. Dalla precedente proporzione si ricava

$$1+\gamma = d\,.\,1{,}421\,\frac{v'^2}{v^2}\;;$$

e con questa formola e coi valori di d, v, e v' dati dalla seconda e terza colonna della tavola premessa sono stati calcolati i numeri della quarta colonna. Dal confronto di questi numeri risulta che pei gas semplici, come l'ossigeno e l'idrogeno, la ragione dei calori specifici è costante per tutti ed eguale a quella per l'aria, poichè le piccole differenze che si notano, possono essere attribuite agli errori inevitabili delle esperienze. In quanto ai gas composti la legge è un po' più complicata: Dulong ha fatto conoscere alcuni principii che conducono al discoprimento di essa, ma la loro esposizione non appartiene a questa nostra parte della Fisica. Vedasi la citata Memoria di Dulong.

6. Il modo, col quale abbiamo considerato le vibrazioni di una colonna cilindrica d'aria che eccita un suono, è egualmente applicabile alle vibrazioni longitudinali delle verghe solide elastiche di materia qualunque. Si possono eccitare dei suoni con una verga elastica fissa in una estremità, o libera nelle sue due estremità e sostenuta nel mezzo, sfregandola con un panno o con una pelle sparsi di polvere di colofonia. In questo modo le sezioni normali all'asse della verga prendono un movimento alternativo verso le due estremità, o bene formando dei nodi si suddividono in più sistemi animati da moti alternativi contrarii ed a questa specie di vibrazioni si è dato il nome di *longitudinali*. (Vedasi la Nota I).

Il movimento di queste vibrazioni è in tutto analogo a quello di una colonna d'aria. Se la verga ha una sezione fissa nell'estremità, vibrando, o non forma alcun nodo, od i nodi sono a $\frac{2}{3}$; o vero $\frac{2}{5}$, e $\frac{4}{5}$; ovvero a $\frac{2}{7}$, a $\frac{4}{7}$, a $\frac{6}{7}$ della lunghezza, ec., partendo dalla sezione nell'estremità fissa; e se la verga è sostenuta nel mezzo, essa deve avere un nodo in questo punto, ed inoltre può formare dei nodi ad $\frac{1}{3}$; o a $\frac{1}{5}$, e $\frac{2}{5}$; o ad $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$ dell'intera sua lunghezza, contando dal mezzo, ec., e nelle estremità libere termina sempre in un ventre. Si comincia ad avere il suono più grave nel primo caso, quando la lunghezza dell'ondulazione è doppia di quella della verga; e nel secondo caso quando le è semplicemente eguale; ed i suoni successivi corrispondono a delle onde, le cui lunghezze sono $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ ec. di quella della prima corrispondente al suono più grave.

Riconoscendo il suono più basso che rendono delle verghe della stessa lunghezza, per esempio di un piede, e paragonandolo a quello reso da una colonna d'aria pure di un piede, i rapporti

dei suoni saranno come i numeri delle vibrazioni che ciascuna delle verghe, e la colonna d'aria faranno nello stesso tempo, e come questi numeri di vibrazioni sono nella ragione della velocità con cui le ondulazioni si propagano lungo le verghe stesse, si avranno i rapporti delle velocità con cui si propaga il suono nelle sostanze di cui le verghe sono composte. Con questo mezzo Savart ha trovato le velocità di propagazione del suono che abbiamo dato nella tavola dell'articolo 10 della Lezione XX.

7. Quando si pone una corda od altro corpo sonoro in vibrazione, oltre al suono principale più basso, si odono varie volte la sua ottava, la ottava della sua quinta, la doppia ottava, la doppia ottava della sua terza, cioè i suoni che sarebbero prodotti da corde le cui lunghezze fossero $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ ec. della lunghezza della corda intera. Questi suoni che si chiamano *armonici*, sono tanto più sensibili, e si possono distinguere con maggior facilità impiegando una corda lunga e grossa, ed ascoltando il suono principale, detto anche *generatore*, quando stà per estinguersi. In circostanze favorevoli si sono percepiti sino a sette suoni resi contemporaneamente da una stessa corda. Daniele Bernoulli ha dato la spiegazione meccanica di questo fenomeno. Egli dimostrò che una corda che vibra, nello stesso tempo che eseguisce la vibrazione totale secondo una curva che si estende a tutta la sua lunghezza, può dividersi da se stessa in due, tre, quattro ec. parti aliquote, ciascuna delle quali forma la sua curva e fa le sue vibrazioni in una metà, terza, quarta ec. parte del tempo, senza che le vibrazioni parziali di queste parti si disturbino una coll'altra. (1) Ciascuna di queste vibrazioni produce nell'aria un'onda corrispondente, e le differenti onde si propagano senza confondersi, e causano le sensazioni di altrettanti suoni, perchè è un principio che si dimostra in meccanica che, *se si imprimono a un sistema di corpi o punti materiali differenti movimenti molto piccoli che li spostino momentaneamente dalle loro posizioni d'equilibrio stabile; tutti questi movimenti non che le vibrazioni a cui danno origine si eseguiscono senza alterarsi reciprocamente.* Questo principio è stato chiamato dal suo autore Daniele Bernoulli il principio *della coesistenza delle piccole oscillazioni*, esso è sperimentalmente verificabile nelle onde prodotte contemporaneamente in vari punti di una superficie d'acqua stagnante, le quali si traversano, e si sovrappongono senza confondersi, e nei suoni che s'incrocicchiano in tutte le direzioni senza modificarsi.

(1) Vedasi la Nota I.

8. Sauveur ha istituito un esperimento, che se non mostra la coesistenza delle vibrazioni, mostra però che una corda può effettivamente suddividersi per se stessa in tante parti aliquote vibranti. Se si pone un cavalletto alla metà, ad un terzo, ad un quarto ec. di una corda, il quale non prema al segno d'intercettare ogni comunicazione fra le due parti della corda; e se si fa in seguito vibrare la parte più corta, si ode che anche l'altra più lunga rende un suono unisono colla più corta. Questo effetto non può risultare senza che la parte più lunga non si divida in parti d'eguale lunghezza alla parte più corta ciascuna delle quali vibri per se stessa. Così per esempio se *A B* è la corda totale, Fig. 7, ed *A C*, Fig. 9, 10, 11, 12, una sua parte che sia un terzo, un quarto, un quinto ec. della totale, e si fa vibrare *A C*, conviene che la parte *C B* si suddivida per se stessa in due, tre, quattro ec. parti che tutte vibrino contemporaneamente con *A C*. Quindi, il punto 1 nella Fig. 10, i punti 1, 2 nella Fig. 11; i punti 1, 2, 3, nella Fig. 12, devono rimanere immobili, cioè costituire dei nodi, e le porzioni comprese fra questi punti devono solo vibrare, ma in modo che le loro parti siano alternativamente situate al di quà e al di là della linea d'equilibrio, e formare una curva simile a quella della Fig. 5 con cui abbiamo rappresentato le onde di una colonna aerea. Se infatti si pongono a cavalcione della parte più lunga alcuni pezzetti di carta, si vede che quelli che si trovano sovrapposti ai *nodi*, cioè ai punti 1, 2, 3 di suddivisione delle diverse parti, restano immobili, mentre quelli sovrapposti ai punti intermedii, cioè ai *ventri*, sono lanciati al primo momento che la corda vibra.

9. Un'altro fatto importante collegato colla comunicazione delle vibrazioni sonore, osservato già fin dal tempo degli Accademici del Cimento (1), è che un corpo posto in vibrazione può col solo intermedio dell'aria farne entrare in vibrazione un'altro che gli sia vicino. Se si pongono, per esempio, due corde tese l'una a canto dell'altra che siano all'unisono, se l'una è messa in vibrazione, in breve anche l'altra si pone a vibrare. Questa trasmissione di moto si opera per gradi; ogni vibrazione dell'aria, prodotta dalla prima corda, trasmette un piccolo impulso alla seconda e questi impulsi, accumulandosi successivamente senza alterarsi, perchè la seconda corda essendo all'unisono ha una disposizione a vibrare ad

(1) Vedansi le Aggiunte, compilate dal Prof. Gazzeri, alla nuova edizione dei Saggi di naturali esperienze fatte nell'Accademia del Cimento citate all'art. 6 della Lez. XX.

eguali intervalli di tempo, finiscono coll'imprimerle un movimento sensibile che la fa risuonare. Questo stesso fenomeno si produce ancorchè la seconda corda non sia all'unisono, ma possa dividersi in parti aliquote eguali alla lunghezza della prima, come si può assicurarsene ponendo dei cavalletti di carta nei punti dove devono formarsi dei ventri. Si racconta che con una voce ben forte e sostenuta alcuni sono riusciti a rompere dei vasi di vetro sottili e convessi, i quali prima d'infrangersi entravano in un tremito assai forte. La rottura era forse agevolata, dice Chladny, da qualche piccola stria fatta nel vetro. Una comunicazione con alcuni punti dei corpi sonori operata per mezzo di materie solide serve anche a trasmettere le vibrazioni ed eccitare delle risonanze. Dai modi, coi quali queste risonanze si producono, sono tratte le massime per la costruzione delle casse armoniche che si applicano agli stromenti musicali onde accrescere il loro effetto (1).

10. Accade talvolta quando s'intonano contemporaneamente dei suoni, specialmente sull'organo, che si ode a certi periodi un rinforzo o diminuzione nelle loro intensità, e se questi periodi sono molto corti, di modo che ne succeda un numero maggiore di 32 in un secondo di tempo, si sente come un terzo tuono più basso risultante dai due. Per schiarire il modo, col quale si deve concepire che questo fenomeno si produce, prendiamo il seguente esempio. Supponiamo che i suoni intonati siano un *do* ed un *sol* i cui numeri di vibrazioni stanno fra loro come 2 : 3. Rappresentiamo gli intervalli di tempo fra una vibrazione e l'altra rispettivamente con degli spazii eguali fra i punti situati sopra due linee rette, nel seguente modo

sol . . . .

do . . . .

coincidenze . . . .

Come mostra la figura vi sarà coincidenza di vibrazioni, e per conseguenza delle onde corrispondenti, per ogni due intervalli del *do* e tre del *sol*. Se questo concorso di pulsazioni ad ogni due vibrazioni del *do* si ripete più di 32 volte per secondo, l'udito percepisce la sensazione del *do* dell'ottava più bassa, e i due suoni sembrano rinforzati come se loro si applicasse realmente sopra l'istrumento l'accompagnamento di questa ultima voce.

(1) Savart. Ann. de Chim. et Phys. Nov. 1819. Giug. 1820. Gen. 1824.

In luogo di considerare il *sol* perfettamente intonato col *do*, fingiamo che sia un poco alterato. Supponiamo che mentre, che la canna del *do* fa 258 vibrazioni, quella del *sol* non ne faccia che 384, i quali numeri differiscono poco dalla ragione di 2 : 3. Cominciamo dal considerare i due suoni da un istante, in cui il mezzo della vibrazione dell' uno coincida col mezzo della vibrazione dell' altro. Continuando le vibrazioni, questa coincidenza si ripeterà sei volte in un secondo, poichè per ogni 43 vibrazioni del *do* si avranno 64 vibrazioni intere del *sol*. Gli incontri succederanno per le vibrazioni che nell' ordine progressivo corrisponderanno rispettivamente ai numeri delle due serie seguenti

do	0	43	86	129	172	215	258
sol	0	64	128	192	256	320	384

La coincidenza delle pulsazioni sopra l' udito non sarà perfetta che per le coppie di vibrazioni qui notate; ma per un piccolo numero di vibrazioni prima e dopo di ciascuna coppia, quantunque non vi sia coincidenza perfetta, la deviazione sarà assai piccola e non percettibile all' udito. I due suoni sembreranno adunque in questi istanti rinforzati o come accompagnati dal *do* più basso, egualmente che nel caso precedente in cui si supposero le intermittenze con una coincidenza perfetta. In seguito la deviazione anderà aumentando, e verrà ad essere massima nella metà di un intervallo fra una coincidenza e l' altra; l' udito sarà sensibile a questa discordanza un poco prima e un poco dopo del suo massimo, il rinforzo delle coincidenze non esisterà più ed i suoni sembreranno in questi istanti debilitati. Si noteranno così, in questo caso, nel periodo di un secondo di tempo sei aumenti e sei decrementi alternativi, nell' intensità dei suoni, che si succederanno ad intervalli eguali. A questi aumenti si è dato il nome di *battimenti*.

Dall' esempio che abbiamo prodotto si vede che queste alternative d' intensità di due suoni sono un criterio per giudicare che le voci non stanno perfettamente d' accordo. Estendendo questo principio a tutti i casi alcuni hanno dedotto un metodo pratico per accordare gli istrumenti di musica, che è forse il solo che sia fondato su principii teorici e che non dipenda dal giudizio dell' orecchio.

11. Sauveur ha impiegato questi battimenti delle canne d'organo per riconoscere il numero di vibrazioni che corrisponde ad una data nota di musica. Supponiamo che si sia bene accordata sopra un organo una terza maggiore, come sarebbe un *do* ed un *mi* dell' ottava più bassa, e poi una terza minore cioè un *do* ed un *mi*♭, il *mi*♭, detto

mi bemol, essendo una voce le cui vibrazioni, fatte nello stesso tempo, stanno a quelle del *mi* naturale come 24 : 25. Facciasi risonare la voce *mi* bemol col *mi* naturale, e continsi i battimenti o rinforzi di suono in un dato tempo. Siansi, per esempio, contati trentadue battimenti per ogni cinque secondi. Ora siccome per ogni 24 vibrazioni del *mi* bemol, si fanno 25 vibrazioni del *mi* naturale, se questi due suoni si sono incontrati 32 volte, bisogna che il *mi* bemol abbia fatto $32 \times 24 = 768$ vibrazioni, ed il *mi* naturale $32 \times 25 = 800$ vibrazioni, per ogni cinque secondi. Il *mi* naturale farà dunque $\frac{800}{5} = 160$ vibrazioni per secondo, ed il *do* della prima ottava, che ne fa soltanto $\frac{4}{5}$ di quelle del *mi* farà $\frac{4}{5} \cdot \frac{800}{5} = 128$ vibrazioni, come abbiamo trovato sopra.

12. Per compire l'esposizione di tutte le parti, che sogliônsi comprendere nell'Acustica, ci resterebbe a parlare di ciò che si chiama il temperamento in musica, delle vibrazioni dei corpi in tutte le dimensioni e direzioni, delle leggi delle loro risonanze, e della produzione dei suoni negli stromenti a linguette. La prima questione è puramente aritmetica, ed ora che si è comunemente convenuto che il temperamento preferibile è l'*eguale*, si riduce ad interpolare 11 medie proporzionali fra 1 e 2. In quanto alle altre questioni esse sono ancora poco suscettibili dell'applicazione dei principii generali della meccanica, ed il poco che si può dire appartiene alle parti più sublimi delle matematiche. La descrizione del meccanismo degli organi dell'udito e della voce appartiene più propriamente alla Fisiologia che alla Fisica matematica: il nostro oggetto deve limitarsi a far conoscere secondo i principii dinamici le leggi fondamentali della produzione dei fenomeni acustici, talchè facile riesca l'intelligenza della spiegazione dei meccanismi suddetti, o dei fenomeni più complicati, che può offrire la lettura delle opere che ne trattano espressamente.

OTTICA

LEZIONE XXIII.

Fenomeni e leggi della luce diretta, e della luce riflessa e rifratta ordinariamente.

1. La luce è il mezzo pel quale si operano i fenomeni della visione. Atti a percepire soltanto gli oggetti che questo mezzo ci rende visibili, senza scorgerlo esso stesso, appena ne sospettiamo a prima vista la sua esistenza. Una leggiera riflessione però basta a convincerci che il nostro senso non verrebbe commosso, se la causa della visione non consistesse nel movimento di qualche sostanza.

Lo spazio vacuo sarebbe nelle tenebre, la luce non esiste se non dove esistono corpi. Il fuoco, l'elettrico, i grandi corpi dell'universo, cioè il sole, le stelle, sono le fonti della luce. Ma se fra gli occhi e questi corpi non esistesse qualche mezzo di comunicazione non potremmo essere avvertiti della loro presenza.

Due soli modi, in apparenza ammissibili, si sono immaginati, pei quali i corpi luminosi possono esercitare un'azione da lontano. O scagliando continuamente una infinità di corpuscoli estremamente minuti che traversano lo spazio e penetrano nei nostri occhi facendo nascere col loro urto sulla retina la sensazione della luce e dei colori; od immaginando tutto lo spazio ed i corpi ripieni di un etere sottilissimo, incapace di opporre una resistenza sensibile alle masse ponderabili che si muovono in esso, ed il quale sia messo in ondulazione dai corpi luminosi in un modo analogo a quello, in cui l'aria è messa in ondulazione dai corpi sonori.

Ciascuno di questi due modi di concepire la propagazione della luce ha avuto i suoi partigiani. I fisici del secolo passato, seguendo Newton, hanno adottato il primo modo, che chiamasi il *sistema dell'emissione;* i fisici del secolo corrente seguendo Huyghens, Young e Fresnel hanno trovato vero il secondo che dicesi il *sistema delle ondulazioni.*

Newton stesso ammetteva un'etere che riempisse lo spazio, avente un'influenza grande sui fenomeni della luce, e probabilmente non avrebbe introdotto, contro la sua prima regola di filo-

sofare (1), come altra causa di questi fenomeni, la projezione velocissima di corpuscoli eterogenei, se riputando inconsistente colle ondulazioni la propagazione della luce in linea retta, e la riflessione totale nell'interiore dei corpi diafani, non si fosse creduto forzato ad ammetterli. Queste inconsistenze sono ora svanite stante un'ingegnoso principio di Young, chiamato il *principio delle interferenze*, e le fine considerazioni di Fresnel, ed il sistema delle ondulazioni che concilia in un modo semplice la spiegazione di tant'altri fenomeni inesplicabili nell'altro sistema, ha ottenuto il comune assenso.

Noi seguiremo questo sistema nel ridurre a principii meccanici il concepimento dei fatti principali che anderemo analizzando sui fenomeni luminosi, solo indicheremo talvolta come gli stessi fatti erano concepiti nel sistema dell'emissione: frattanto cominceremo dall'esporre i due fatti principali della propagazione della luce diretta.

Leggi della propagazione della luce diretta.

2. I due fatti che prima si presentano alla considerazione sulla propagazione diretta della luce sono, che essa si propaga sensibilmente in linea retta, e successivamente, cioè impiegando del tempo.

Il primo fatto è assai facile a verificarsi. Se si frappone un corpo opaco su la linea retta che va dall'occhio all'oggetto luminoso, immediatamente la vista dell'oggetto ci è tolta. Se si lascia penetrare per un piccolo foro in una camera oscura la luce del sole, si vede tracciato il suo cammino in linea retta dai piccoli corpuscoli che nuotano nell'aria; e ricevendo questa luce su di un piano perpendicolare al suo cammino ad una distanza qualunque, sempre vi dipinge sensibilmente un'immagine della grandezza del foro. (Vedasi la Nota 1). Un filo o porzione di luce separata dal resto, e ridotta al grado minimo di sottigliezza sensibile è quello che i fisici chiamano *un raggio di luce*.

3. Non così ovvio a riconoscersi è l'altro fatto della propagazione successiva della luce. La velocità, con cui la luce si propaga è tanto grande, che la nostra immaginazione non sarebbe mai stata indotta a concepire un movimento così veloce, se prove incontestabili non l'avessero dimostrato. Le distanze sulla terra sono percorse

(1) Causas rerum naturalium non plus admitti debere quam quae et verae sint et earum phaenomenis explicandis sufficiant. Philosophiae naturalis Principia math. Lib. III, Regula I.

dalla luce in un tempo impercettibile; solo negli spazii celesti, e nelle velocità dei corpi che si muovono in essi furono trovate delle misure adequate alla velocità della luce.

Cassini, il maggiore, fu il primo che ebbe l'idea di spiegare colla trasmissione successiva della luce il fenomeno celeste, offerto dal primo satellite di Giove, di cui andiamo a parlare; ma avendo posto troppa fiducia nelle tavole degli altri tre satelliti, che erano state costrutte principalmente per opera sua, abbandonò questa spiegazione, e così lasciò a Romer l'onore di riprodurla e di dimostrare una delle più importanti verità dell'Ottica. (1) Il fenomeno di cui si tratta è il seguente. Giove, come è noto, è circondato da quattro satelliti che fanno le loro rivoluzioni intorno a lui: nel passare dietro il corpo di Giove, per rispetto al sole, essi s'immergono nell'ombra di questo pianeta, si vedono ecclissarsi, e poi riapparire qualche tempo dopo, quando escono dall'ombra. Gli ecclissi devono succedere a certi periodi di tempo che gli astronomi al tempo di Cassini sapevano ben calcolare ma soltanto esattamente rispetto al primo satellite. Ora si era notato che quando la terra camminava nella sua orbita da C verso O (Fig. 13), e Giove appariva andare dalla congiunzione verso l'opposizione (2) si osservavano gli ecclissi del primo satellite successivamente più presto, e per lo contrario quando la terra andava da O' verso C', e Giove s'accostava alla congiunzione col sole, gli ecclissi si vedevano ritardare successivamente, e la differenza fra le anticipazioni ed il ritardo degli ecclissi del satellite, da quando Giove era in opposizione a quando era in congiunzione, cresceva sino ad un quarto d'ora. Romer provò che questo ritardo non era reale, ma apparente, e che la ragione ne era che quando il satellite riappare in G, la sua apparizione è vista prima dalla terra posta in O di quando è in C, di tutto il tempo che la luce impiega a percorrere la distanza $O\,C$.

Calcolando secondo le situazioni corrispondenti della terra e di Giove, ed il tempo osservato del ritardo od anticipazione degli ecclissi si dedusse che la luce impiega $16^m \,.\, 26^s,4$ o sia $986^s,4$ a scorrere il grand'asse dell'orbita terrestre (3); e come il raggio medio

(1) Histoire de l'Academie de Sciences Tom. 1, pag. 213.

(2) Gli astronomi dicono che un pianeta è in congiunzione quando sta nello stesso piano di longitudine in cui trova il sole e dalla stessa parte, e dicono che è in opposizione quando è visto dalla parte opposta: nel primo caso il sole si trova fra la terra ed il pianeta, nel secondo caso è la terra che è fra il pianeta ed il sole.

(3) Delambre Astron. Tomo III, pag. 106.

dell' orbita della terra è di 24047,1 raggi equatoriali terrestri di 6378481 metri ciascuno, ne risulta che la velocità di propagazione della luce è data da $\frac{2 . 24047,1 \times 6377481}{986'',4}$ ossia da 310,998,000 metri per un secondo di tempo.

4. A Bradley, celebre astronomo inglese, si presentò prima dell' anno 1727 un altro fenomeno fondato su altro principio che conduce allo stesso risultamento pel valore della velocità di propagazione della luce, e la conferma pienamente (1).

Per concepire chiaramente come si produca il fenomeno osservato da Bradley conviene premettere che i raggi di luce che ci pervengono dalle stelle possono considerarsi tutti paralleli fra loro, qualunque sia il punto dell' orbita in cui la terra si trova, stante l' incomparabile distanza delle stelle in confronto delle dimensioni dell' orbita terrestre. Ciò posto, per fare il caso più semplice, siavi una stella i cui raggi di luce procedano realmente secondo la verticale di un paese, la quale sia perpendicolare al piano dell' orbita terrestre, e supponiamo che, stando pel detto paese, si voglia determinare la direzione del raggio visuale di questa stella, per mezzo di un traguardo o canocchiale $A B$ (Fig. 14) riferendola a quella del filo a piombo o verticale del luogo. In questo caso il canocchiale non dovrà essere diretto verso la stella perpendicolarmente al piano dell' orbita terrestre, ma rappresentando con $A T$ lo spazio che percorre la terra durante il tempo che la luce percorre $B T$, il canocchiale dovrà essere inclinato rispetto alla verticale o perpendicolare dell' orbita terrestre in modo che faccia con essa un' angolo che abbia per tangente

$$\frac{A T}{B T}.$$

Poichè è chiaro che avendo questa posizione, mentre la terra procede nella direzione $A T$, l' asse del traguardo o canocchiale $A B$ verrà incontrato successivamente in tutti i suoi punti dall'estremità discendente del raggio di luce $B T$, che sembrerà così percorrere quest' asse.

Sei mesi dopo la terra si troverà dalla parte opposta della sua orbita, e camminerà in verso contrario, così che se si ripeta la stessa osservazione a quest' epoca, e la luce proceda realmente con una velocità finita, il traguardo dovrà essere inclinato in una dire-

(1) Philos. Trans. n.° 406 e 485.

zione opposta (Fig. 14 *bis*) di modo che faccia ancora colla verticale un angolo che abbia per tangente

$$\frac{A' T'}{B' T'}$$

eguale a quello che faceva prima dalla parte opposta. Questo è appunto ciò che Bradley ha verificato succedere. Una stella fissa nelle circostanze che abbiamo supposto si troverebbe nelle due dette epoche dell'anno fare da una parte e dall'altra della verticale, o linea del zenith del luogo un'angolo di 20",446 (1), così che deve essere

$$\text{tang. } 20'',446 = \frac{B\,T}{A\,T}.$$

Ma dai dati astronomici si sa che la terra percorre in un secondo uno spazio $A\,T = 30538{,}5$ metri; sostituendo questo valore si avrà la velocità della luce in un secondo espressa da

$$B\,T = 3053^{m}9{,}2 \text{ cotang. } 20'',446 = 308{,}080{,}000^{m}.$$

Questa velocità concorda sufficientemente con quella trovata coll'altro metodo, e, ciò che è pure notevole, essa si trova eguale per la luce del sole, dei pianeti, delle stelle ed in generale di tutti i corpi luminosi.

5. A queste nozioni elementari relativamente alla propagazione diretta della luce, aggiungeremo alcuna cosa rispetto alla sua intensità.

Nel sistema dell'emissione, le molecole luminose a misura che si diffondono venendosi a distribuire su delle superficie sferiche sempre maggiori, l'intensità della luce deve decrescere come cresce l'estensione di queste superficie. Ora dalla geometria si sa che le superficie delle sfere aumentano come i quadrati dei raggi, dunque l'intensità della luce deve diminuire in ragione inversa dei quadrati dei raggi, o del quadrato della distanza al corpo luminoso, che è come il centro della superficie su cui si trova distribuita la luce.

Nel sistema delle ondulazioni l'intensità della luce deve ripetersi, come quella del suono, dalla quantità della forza viva delle vibrazioni degli atomi luminosi. Ora nella teoria della propagazione delle vibrazioni del suono abbiamo già fatto osservare, (Lez. XX art. 12, e Nota III) che le amplitudini o le velocità delle vibrazioni

(1) Memoirs of the Astr. Society of London Vol. IV. P. I. pag. 69.

nel propagarsi sfericamente decrescono in ragione inversa delle distanze, dunque la forza viva decrescerà come i quadrati delle stesse distanze, e nella stessa ragione decrescerà pure l'intensità della luce.

Così presentando una superficie perpendicolare alla retta che va al corpo luminoso, la luce che ogni punto di essa riceve non avrà che il quarto d'intensità ad una distanza doppia, un nono ad una distanza tripla, e così successivamente.

Supponendo invariabile l'apertura della pupilla dell'occhio, la luce, che riceve l'occhio da ciascun punto di una superficie luminosa, sarà dunque in ragione inversa del quadrato della distanza; ma anche ogni piccola parte della superficie apparirà tanto più piccola quanto è più lontana, e la sua grandezza apparente diminuirà appunto come il quadrato della distanza (1). Ogni parte della superficie parrà quindi non aver cambiato intensità di luce, perchè quanto più debole sarà la luce che essa invia all'occhio, altrettanto piccola sarà l'immagine che quella luce deve presentare alla vista. Così le parti omologhe delle immagini dei corpi luminosi sono bensì più piccole, ma sono egualmente chiare a qualunque distanza essi siano situati, prescindendo dalla luce perduta nell'attraversare l'aria, o gli altri mezzi non perfettamente diafani.

6. La parte dell'ottica che versa sull'intensità della luce chiamasi *Fotometria:* essa è però assai imperfetta nella parte sperimentale, e non possediamo ancora un buon istromento d'un uso certo e generale per misurare la intensità delle luci (2). Il fotometro di Ritchie, che è dei migliori, si limita a

(1) Per convincersene basta osservare che le linee appaiono a noi della grandezza degli angoli che esse sottendono come corde, e che gli angoli sotto i quali saranno viste, dopo una certa distanza, le dimensioni lineari delle piccole parti di una superficie diminuiranno sensibilmente nella proporzione della distanza stessa, e per conseguenza le grandezze apparenti delle medesime parti sembreranno diminuire come il quadrato della distanza. Legend. Lib. III. Prop. XXVII.

(2) Il Sig. Melloni ha recentemente fatto osservare nella sua pregevole Memoria, *sur l'identité des diverses radiations lumineuses calorifiques et chimiques* etc. (Bibl. univ. de Genève Mai 1842.), che i fotometri dipendenti dalle azioni chimiche e calorifiche non sono atti a darci una misura delle intensità delle luci, la quale nello stato attuale delle nostre cognizioni, non può essere che fondata nel giudizio dell'occhio. Onde le azioni dei raggi chimici o calorifici potessero servire di misura alle intensità delle luci bisognerebbe che esse fossero proporzionali all'azione che esercitano sui nostri sensi i raggi luminosi contenuti nel raggio incidente: ora questa proporzionalità non sussiste nelle tre specie di raggi provenienti dalle varie sorgenti, o sussistendo sarebbe ben

paragonare due luci facendole penetrare in direzione opposta dalle due estremità di una cassetta rettangolare, tutta tinta di nero nel suo interno, e riflettendole sopra una carta oliata (Fig. 15), od altra superficie trasparente appannata situata verso la metà della faccia superiore della cassetta, per mezzo di due specchi interni inclinati di 45° col fondo. Le due luci riflesse trovandosi così una accanto dell'altra, si può facilmente giudicare se sono eguali; e se non lo sono, si allontana o si avvicina la sorgente di quella di esse, che prodotta artificialmente serve di termine di confronto, finchè siano ridotte a dare una illuminazione eguale. Ciò fatto le intensità delle luci che si vogliono misurare si valutano in ragione inversa del quadrato della distanza, a cui si deve portare la sorgente della luce di confronto.

Leggi della riflessione e della rifrazione ordinarie della luce.

7. Quando un raggio di luce incontra nel suo cammino la superficie di un corpo subisce varie modificazioni. Se la sua superficie è di quelle che hanno un pulito specolare, i raggi di luce sono per la più gran parte riflessi regolarmente, altri sono sparpagliati o diffusi e rendono visibile la superficie, altri penetrando nel corpo sono estinti. Se la superficie appartiene ad un corpo trasparente, i raggi sono in parte più o men grande riflessi regolarmente, i più di essi traversano il corpo in un modo pure regolare, e si dicono rifratti, altri sono diffusi tutt'all'intorno e fanno sì che il corpo trasparente sia pur visibile, finalmente altri sono estinti od assorbiti nell'interno del corpo. I modi, secondo i quali i raggi di luce sono ordinariamente riflessi e rifratti, conducono ad alcune leggi principali dell'ottica che ora esporremo.

8. Da un piccolo foro in una camera oscura introducasi un piccolo fascetto o raggio di luce, e facciasi in modo che vada a cadere sopra una superficie piana specolare; poi ricevasi sopra una superficie bianca qualunque piana il fascetto riflesso dalla prima superficie. Esaminando il fenomeno si osservano le leggi seguenti. Elevata la perpendicolare Pp (Fig. 16) alla superficie dello specchio piano nel punto P, dove il raggio di luce viene a cadere, conducasi per questa perpendicolare e pel raggio stesso di luce un piano, e poi misurinsi gli angoli FPp, pPS che il raggio di

presto alterata dai mezzi che i raggi devono attraversare, o mal sarebbe indicata dal fotometro per l'ineguale sensibilità alle loro azioni delle materie che lo compongono.

luce, prima di essere riflesso e dopo la riflessione, fa colla detta perpendicolare: si troverà che il raggio riflesso stà sempre nello stesso piano *F P p* determinato dalla perpendicolare *P p* e dal raggio diretto od *incidente F P*; il quale piano chiamasi perciò piano d' *incidenza* e di *riflessione*; e che l' angolo fatto dal raggio riflesso *P S* colla perpendicolare *P p* che dicesi *angolo di riflessione* è eguale appunto a quello *F P p* che fa colla stessa perpendicolare la parte incidente del raggio, e che chiamasi *angolo d' incidenza*; talchè nel fenomeno della riflessione si hanno le due leggi, 1.° che il raggio incidente ed il riflesso sono nello stesso piano colla perpendicolare alla superficie riflettente nel luogo d' incidenza, 2.° che l' angolo d' incidenza è sempre eguale all' angolo di riflessione.

9. Se la superficie riflettente in luogo di essere piana fosse curva, possiamo considerare i raggi di luce che cascano sui varii suoi punti separatamente, condurre per ciascuno di questi punti un piano tangente alla superficie, ed il raggio riflesso sopra ognuno di essi si comporterà relativamente al rispettivo piano tangente, come ciascuno dei raggi componenti il fascetto di luce considerato prima si conduceva rispetto alla superficie piana specolare.

10. Invece di ricevere direttamente il fascetto di luce introdotto nella camera oscura sopra la superficie specolare, che supporremo orizzontale, sovrapponiamo a questa superficie un corpo diafano come un parallelepipedo di cristallo, od un liquido trasparente contenuto da pareti che lo circondino (Fig. 17). Osservando il raggio di luce in questo nuovo caso si vedrà che esso continua a conservarsi sempre in tutto il suo corso nel piano verticale di prima, ma non va più a cadere nello stesso punto *P*, all' entrare nel nuovo mezzo si rifrange invece, e si avvicina alla perpendicolare *i I i'* condotta pel punto d' incidenza *I*, e va a cadere in un punto più prossimo *P'*. Il raggio *I P'* così rifratto è poi riflesso nel punto *P'* della superficie specolare sul fondo, facendo come nel caso precedente colla nuova perpendicolare *P' p'* l' angolo d' incidenza eguale all' angolo di riflessione, e giunto il raggio un' altra volta alla superficie diafana esterna emerge nel punto *E*, dove torna a rifrangersi, di modo che divenuto *emergente* secondo *E S*, fa colla perpendicolare *E e* alla superficie trasparente un angolo *e E S* eguale, ma dalla parte opposta, a quello che fa la porzione di raggio incidente *F I* colla rispettiva perpendicolare *I i*.

L' angolo *F I i* si chiama, come prima, *angolo d' incidenza*, l'angolo *P' I i'*, eguale ad *i I k*, *angolo di rifrazione*, e le due porzioni *F I*, *I P* del raggio stanno sempre, come abbiamo detto, nello

stesso piano colla perpendicolare iIi'. Dall'altra parte dell'emergenza del raggio, l'angolo $P'Ee$, eguale ad eEf, è l'angolo d'incidenza, ed eES è quello di rifrazione, e le parti $P'E$, ES del raggio stanno sempre nello stesso piano di prima. Se si danno al raggio incidente FI diverse inclinazioni, e si misurano per ciascuna di esse gli angoli FIi, e kIi, od i loro seni fg, hk si trova che questi seni stanno sempre in una ragione costante. Egualmente si trova che i seni tn ed mn degli angoli d'incidenza e rifrazione del raggio all'escire, stanno in una ragione costante ed inversa di quella dei seni fg ed hk.

Le leggi della rifrazione sono dunque 1.° che il raggio incidente ed il raggio rifratto sono nello stesso piano colla perpendicolare al punto d'incidenza della superficie rifrangente. 2.° che il seno dell'angolo d'incidenza stà al seno dell'angolo di rifrazione in un rapporto costante, che chiamasi *indice di rifrazione*. 3.° L'indice di rifrazione ha un valore inverso, quando il raggio passa viceversa dal secondo mezzo nel primo. La seconda legge, la più difficile a scoprirsi, si chiama la legge di Snellius, perchè questo fisico Danese fu il primo che la riconobbe.

11. Se si chiama i l'angolo d'incidenza, r l'angolo di rifrazione, ed n l'indice di rifrazione, si ha così per la seconda legge

$$(1) \qquad \sin r = \frac{1}{n} \sin i.$$

Viceversa, passando il raggio dal secondo mezzo nel primo, cioè nell'emergenza, posto $r = i'$, si ha

$$(2) \qquad \sin r' = n \sin i'.$$

Nel passaggio della luce dall'aria nell'acqua l'indice di rifrazione è circa $\frac{4}{3}$, e dall'aria nel vetro comune è circa $\frac{3}{2}$. Per farsi un'idea dei valori degli indici di rifrazione delle varie sostanze si possono consultare la tavola della Nota I, o quelle che trovansi nei varii trattati di Fisica, non essendosi ancora scoperta una legge per determinarli *a priori* secondo la natura delle sostanze.

12. Nel passare da un mezzo meno rifrangente in uno più rifrangente un raggio può sempre essere rifratto, perchè $1 : n$, e $\sin i$ essendo minori dell'unità, dalla formola (1) risulta sempre $\sin r < 1$. Non succede sempre così nel passaggio di un raggio da un mezzo più rifrangente in uno che lo sia meno, in questo caso, per esempio nel passaggio dal vetro nell'aria, si deve avere

$$\sin r' = \tfrac{3}{2} \sin i'.$$

Il valore di sin r' non può essere reale che fin a tanto che sin $i' < \frac{2}{3}$, cioè fin a tanto che $i' = 41^\circ . 48'$, al di là di questo valore di i' si avrebbe sin $r' > 1$, ed r' angolo immaginario. Se dunque un raggio di luce LI nell'interno di un vetro (Fig. 18) arriva alla superficie d'emergenza inclinato a questa superficie sotto un angolo LIS minore di $48^\circ . 12'$ il raggio non potrà uscire: l'esperienza ci mostra infatti che il raggio in questo caso è tutto riflesso nell'interno del vetro colle leggi di riflessione su riferite. La riflessione dei raggi provenienti dagli oggetti esteriori sulla base di un prisma isoscele si fa in questo caso senza perdita sensibile di luce, e questo modo è forse il migliore per avere delle immagini riflesse di una luce più viva, e superiore a quella di qualunque specchio metallico pulito ad arte. (Vedasi la Nota II.)

13. Quando la superficie rifrangente non è piana, si può considerare in ciascuno de' suoi punti condotto un piano tangente, ed il raggio che cade su qualunque di essi si rifrange nello stesso modo che se penetrasse in un mezzo della stessa sostanza terminato dal rispettivo piano tangente.

LEZIONE XXIV.

Dispersione, ed analisi della luce per mezzo della rifrazione.

1. Nell' esporre le leggi della rifrazione abbiamo supposto che i raggi componenti un pennello di luce passando da un mezzo in un altro più o meno rifrangente si rifrangano tutti egualmente. Il fenomeno non si opera però esattamente così, quando si fa uso della luce bianca naturale. Un pennello di luce bianca, che penetra in un mezzo di diversa refrangibilità, si suddivide comunemente in più raggi diversamente rifratti, o si spiega come in un ventaglio nel piano, in cui ha sofferto la rifrazione, e ciò che non è meno notabile, i diversi raggi in cui si sviluppa producono ciascuno la sensazione di un diverso colore. L' analisi della luce che risulta da questo disperdimento fu intrapresa prima da Newton, ed è uno dei titoli più gloriosi alla rinomanza di questo gran filosofo.

Se, ad imitazione di Newton, si fa entrare per un foro circolare, *F*, (Fig. 19), praticato nell' imposta di una finestra di una camera oscura, un pennello di luce solare che vada a cadere sopra un prisma triangolare *A B C*, di cristallo ben puro. senza strie e colle facce esattamente piane e di bel pulimento, il cui asse sia situato perpendicolarmente alla direzione del pennello, i raggi, rifratti una prima volta all'entrare nel prisma e poi una seconda volta al loro sortire, ricevuti a qualche distanza sopra di un piano, non vi dipingono più un' immagine rotonda e bianca, ma bensì un'immagine oblunga come formata dalla sovrapposizione di una infinità di immagini composte dei più brillanti colori, tutte circolari ed i cui centri contigui sono disposti sopra una linea retta, *P P*, situata nel piano di rifrazione, e che divide per metà lo spettro nel verso della sua lunghezza. Per produrre uno spettro cospicuo l' angolo rifrangente deve essere circa di 60°; si gira il prisma intorno al suo asse perpendicolare alla direzione del raggio incidente sino a che si vede l' immagine dello spettro rimanere sensibilmente stazionaria per una piccola rotazione avanti od indietro data al prisma, il che succede quando la deviazione del pennello di luce rifratta dalla direzione del pennello incidente è la minima, o sia quando lo spettro si allontana meno dal luogo, ove anderebbe a cadere il raggio incidente, se

avesse continuato il suo corso in linea retta senza soffrire rifrazione, ed allora i colori dello spettro sono i più vividi.

Il fenomeno è uno de' più aggradevoli e maravigliosi per la bellezza e vivacità dei colori, di cui lo spettro è composto. Nella fusione dei vari colori, che risulta dalla sovrapposizione delle immagini diverse, Newton notò principalmente sette passaggi o varietà, che cominciando dall'estremità inferiore o meno rifratta dello spettro si seguivano in quest'ordine

Rosso,	Aranciato,	Giallo,	Verde,	Azzurro,	Indaco,	Violetto
45,	27,	48,	60,	60,	40,	80

I numeri posti sotto ciascun colore indicano che diviso lo spettro fatto dal prisma di Newton in 360 parti, ciascun colore, i di cui confini erano sensibilmente discernibili, conteneva il numero di parti che gli sta sotto, la cui somma forma appunto 360.

2. Se si rappresenta (Fig. 20) con *M U* la larghezza dello spettro totale e con *X M* una lunghezza eguale, Newton fece notare la singolarità che le distanze dei confini di ciascun colore al punto *X* seguono la legge delle lunghezze delle corde che danno le sette voci della scala diatonica di un tuono minore, poichè sussistono le seguenti corrispondenze

XU	XI	$X\alpha$	XV	XG	XA	XR	XM
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$
do	*re*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*	*do*:

ed i termini di questa serie sono tali che prendendo le differenze successive fra due di essi, e moltiplicandole per 720, risultano per le parti occupate da ciascun colore gli stessi numeri della serie precedente presi in ordine inverso. Questa coincidenza, secondo si vedrà in appresso è stata puramente accidentale e dipendente dalla qualità del cristallo di cui era fatto il prisma di Newton; nulladimeno abbiamo voluto riferirla, perchè Newton la impiegò in altre circostanze per qualche utile applicazione, come vedremo nel seguito.

3. In luogo di ricevere l'immagine dello spettro sopra un piano si può invece guardare coll'occhio il foro luminoso attraverso il prisma: in questo caso si vede, nella direzione opposta a quella in cui lo spettro era prima progettato, un'immagine allungata del foro, composta dello stesso ordine di colori. Questi sperimenti sono già bastanti per imprimerci un'alta idea dell'importanza dei fenomeni che presentano, ma per analizzare lo spet-

tro nelle sue forme è necessario scrutinarlo con mezzi più potenti che non la semplice vista. Finchè Sir D. Brewster (1) e Sir. J. Hershel (2) non ci faranno conoscere i processi più efficaci, coi quali hanno istituito delle analisi più complete dello spettro, riferiremo il seguente impiegato da Fraunhofer celebre ottico di Benedictbaiern (3).

4. Quest'ottico introdusse in una camera oscura un pennello orizzontale ed immobile di luce solare per una fenditura oblunga, che guardata alla distanza di 24 piedi parigini sottendeva in larghezza un angolo di soli 15 secondi, ed in altezza un angolo di 36 minuti. A questa distanza situò un teodolite ripetitore, ed a quattro pollici e mezzo avanti l'obiettivo del canocchiale di quest' istrumento pose un prisma di Flint di una purezza straordinaria, ed osservò attraverso il canocchiale l'immagine dello spettro che veniva diretta sull'obiettivo, quando il prisma era nella situazione della deviazione minima, ed i raggi medii incidenti ed emergenti facevano angoli eguali colle rispettive facce del prisma. Con questo apparecchio potè osservare successivamente con distinzione tutte le parti dello spettro, e misurare per mezzo del cerchio del teodolite le refrazioni con estrema esattezza. Il rettangolo della Figura 21 rappresenta le parti principali dello spettro come fu da esso osservato e descritto. Al disotto si sono segnati con dei crocetti i limiti dove i passaggi di un colore all'altro sembravano più marcati; le estensioni dei diversi colori nello spettro di Fraunhofer, espressi in $\frac{1}{360}$ parti dell'intiera larghezza, erano come segue

Rosso,	Aranciato,	Giallo,	Verde,	Azzurro,	Indaco,	Violetto
56	27	27	46	48	47	109.

Queste estensioni sono alquanto diverse da quelle osservate da Newton, ciò che dipende dalla diversità dei cristalli dei due prismi impiegati dall'uno o dall'altro.

Ma una particolarità, che non era stata che in parte avver-

(1) Edimburg. Enciclopedia. Art. Optics volum. XVI. pag. 425.

(2) Proccedings of the R. Society. March. 1840.

(3) Le Memorie, che Fraunhofer ha pubblicato su quest'argomento, fanno parte degli Atti dell'Accademia delle Scienze di Monaco: una relazione del loro contenuto trovasi pure negli *Analen der Physik* del Sig. Poggendorf Io mi valgo qui della relazione che di essa si trova nel pregevole Trattato sulla *Teorica degli stromenti ottici* che il distinto astronomo di Padova Professore Santini ha dato in luce luce a prò della Gioventù Italiana.

tita dal D.r Wollaston prima che Fraunhofer ne facesse da se stesso la scoperta, si è il gran numero di linee più o meno sottili, altre nere ed altre chiare, ma tutte ben definite, che si scorgono attraverso lo spettro perpendicolarmente alla sua larghezza. Ecco la descrizione di queste linee negli stessi termini con cui la espose lo scopritore.

« Lo spettro prismatico del sole si presenta rispetto a que-
« ste linee come ho procurato di disegnarlo nell' unita figura,
« egli è presso che impossibile in questa scala esprimere tutte le
« linee e la loro luce (1). Presso *A*, circa, trovasi l' estremo rosso
« e presso *I* l' estremo violetto dell' immagine; un confine preciso
« non si può assegnare con sicurezza da nessuna parte, meno dif-
« ficilmente però nel rosso che nel violetto. Se venga esclusa ogni
« traccia di luce immediata o riflessa dallo specchio, i confini da
« una parte sembrano cadere fra *G* ed *H*, dall' altra parte verso *B*.
« Con una luce solare di grande intensità lo spettro diviene quasi
« della metà più largo, ma per poterne vedere questa maggiore
« estensione si deve impedire che la luce fra *C* e *G* giunga all' oc-
« chio, perchè l' impressione nell' occhio fatta dalla luce nei con-
« fini dello spettro è molto debole, ed è dal rimanente cancellata. In
« *A* si riconosce una forte e ben terminata linea; tuttavia qui non
« trovasi il confine del color rosso, anzi ne è sensibilmente lon-
« tano; presso *a* sonovi ammucchiate molte linee che formano una
« striscia. *B* è una linea ben terminata e di notabile grossezza;
« nello spazio fra *B* e *G* si possono contare 9 linee molto fine e
« ben contornate. La linea *C* è di notabile grossezza, e come la *B*,
« molto nera. Nello spazio fra *C* e *D* io contai circa 30 linee molto
« sottili, le quali, ad eccezione di due, non possono chiaramente
« vedersi (siccome anche quelle fra *B* e *C*) che con forti ingran-
« dimenti, o con prismi molto disperdenti; del resto sono molto
« bene contornate. *D* si costituisce da due forti linee separate sol-
« tanto da una linea chiara; fra *D* ed *E* contai circa 84 linee di
« diversa grossezza. *E* risulta da molte linee delle quali quella del
« mezzo è un poco più cospicua delle altre; fra *E* e *b* se ne nume-
« rano circa 24; in *b* vi sono 3 forti linee, di cui due sono separate
« da una grossa linea chiara; esse appartengono alle più forti dello

(1) Per evitare confusione ci siamo limitati nella figura a dare soltanto le linee che Fraunhofer usò come linee di riferenza, ed alcune altre più notabili che sono contrassegnate con lettere nella figura dell' autore. Volendo porre tutte le linee sottili se ne dovrebbero tracciare 574.

« spettro; nello spazio fra b ed F ne numerai circa 52; la linea F « è alquanto forte. Fra F e G si numerano circa 185 linee di di« versa intensità; in G sono ammucchiate molte linee fra le quali « alcune si distinguono per la loro forza; nello spazio fra G ed H « contai circa 190 linee molto differenti di forza. Le due striscie « presso H sono singolarissime; sono quasi interamente uguali, e « nel loro mezzo trovasi una forte linea molto nera. Da H verso I « le linee sono del pari numerose. Si possono quindi contare nel« l'intervallo fra A e B circa 574 linee. Ho misurato col teodolite « le distanze scambievoli delle linee più forti segnate B, C, D, E, « F, G, H »; queste linee conservano la stessa posizione relativa nei rispettivi spazi colorati dello spettro solare, qualunque sia l'angolo del prisma, e le sostanze rifrangenti che Fraunhofer ha impiegate, e come esse sono bene definite divengono come tanti termini fissi a cui riferire le diverse parti dello spettro, al quale oggetto non possono servire bene i limiti dei colori, perchè troppo incerti e variabili. Riferendo poi le distanze angolari BC, CD, DE, EF, FG, GH alla linea D, di cui Fraunhofer aveva misurato col teodolite la rifrazione, ottenne per gli indici di rifrazione corrispondenti alle dette linee, e per diverse sostanze, i valori che sono espressi nella seguente tavola.

SOSTANZE RIFRANGENTI	INDICI DI RIFRAZIONE						
	B_n	C_n	D_n	E_n	F_n	G_n	H_n
Cristallo detto Flint-glass. . .	1,627749	1,629681	1,635036	1,642024	1,648260	1,660285	1,671062
Idem Crown Glass	1,525832	1,526849	1,529587	1,533005	1,536052	1,541657	1,546566
Acqua	1,330956	1,331710	1,333577	1,335850	1,337803	1,341277	1,344170
Olio di fremenfina	1,470496	1,471530	1,474434	1,478353	1,481736	1,488198	1,493874

5. La dilatazione che nel piano di rifrazione acquista in tutti i suoi punti un filo di luce perpendicolare al detto piano che passa da un mezzo refrangente in un altro è l'effetto che chiamasi la *dispersione* della luce. Questa dispersione è tanto più grande, quanto più gli indici di rifrazione corrispondenti ai raggi estremi dello

spettro differiscono fra loro. Si è convenuto di chiamare *rapporto di dispersione* il rapporto della differenza degli indici di rifrazione dei raggi omologhi in diverse sostanze. Così indicando, n_i, n_k gli indici di rifrazione di due raggi o linee fisse dello spettro di una sostanza conosciuta, per esempio l'acqua, e con n_i' n_k' quelli delle linee fisse omologhe di un'altra sostanza, il rapporto

$$\frac{n_k' - n_i'}{n_k - n_i}$$

chiamasi il rapporto di dispersione.

La tavola seguente dà i rapporti della dispersione delle altre tre sostanze, calcolati coi dati della tavola precedente rispetto all'acqua

RAPPORTI DELLE DISPERSIONI DELLE PARTI DELLO SPETTRO COMPRESE FRA LE LINEE FISSE

SOSTANZE	$\frac{C_n'-B_n'}{C_n-B_n}$	$\frac{D_n'-C_n'}{D_n-C_n}$	$\frac{E_n'-D_n'}{E_n-D_n}$	$\frac{F_n'-E_n'}{F_n-E_n}$	$\frac{G_n'-F_n'}{G_n-F_n}$	$\frac{H_n'-G_n'}{H_n-G_n}$
Flint-glass ed acqua.	2,562	2,871	3,073	3,193	3,460	3,726
Olio di trem. ed acq.	1,349	1,468	1,503	1,560	1,613	1,697
Crown glass ed acqua	1,371	1,557	1,723	1,732	1,861	1,963

Una leggiera riflessione sulla tavola precedente e su questa ci mostra che tanto gli indici di rifrazione che i rapporti della dispersione sono variabili per le diverse sostanze, talchè i loro spettri non solo sono diversamente estesi, ma non sono tampoco simili fra loro; le parti occupate da uno stesso colore non conservando ne' varii spettri lo stesso rapporto colla loro estensione totale. Un prisma di Flint, per esempio, dà proporzionalmente meno rosso e più violetto che non un prisma di Crown-glass (Vedasi la nota I).

6. Fraunhofer determinò anche l'intensità della luce corrispondente alle diverse parti dello spettro. La curva che sta disegnata sopra il rettangolo della figura serve ad indicare le intensità osservate. Le ordinate di questa curva, o le lunghezze delle perpen-

dicolari elevate sull' asse $A\ I$ sono proporzionali alle intensità della luce in quelle sezioni dello spettro che le stesse perpendicolari, prolungate per abbasso, verrebbero ad intersecare. Così la maggiore intensità della luce dello spettro si trova circa il limite fra l' aranciato ed il giallo, dove l' ordinata della curva sarebbe massima. Le coordinate, o intensità della luce laterale alle linee nere B, C, D, E ec. espresse in parti dell' ordinata massima sono proporzionali ai numeri seguenti

presso	B — 0,032	presso	E — 0,48
	C — 0,094		F — 0,17
	D — 0,64		G — 0,031
fra D ed	E — 1,000		H — 0,0056

Per mezzo di questi valori è facile di trovare prossimamente la quantità di luce corrispondente a ciascuna porzione dello spettro, valutandola proporzionalmente all' area della curva compresa fra i limiti di questa porzione. Considerando le parti dello spettro comprese fra due linee nere qualunque, Fraunhofer ha dato i seguenti numeri per esprimere la corrispondente quantità di luce, quella nello spazio $D\,E$ essendo presa per unità,

nello spazio	$B\,C = 0{,}021$	nello spazio	$E\,F = 0{,}328$
	$C\,D = 0{,}299$		$F\,G = 0{,}185$
	$D\,E = 1{,}000$		$G\,H = 0{,}035$

Quantunque le linee nere siano bene definite, la gradazione dei colori, passando da una parte all' altra di ciascuna linea, è però continua, e senza salto sensibile.

7. Le linee nere fisse dello spettro solare si osservano anche negli spettri di tutti i corpi del nostro sistema planetario come la Luna, Venere ec. che sono illuminati dal sole, esse però sono diverse per gli spettri delle diverse stelle, per la luce elettrica, per quelli delle varie luci artificiali. Nello spettro della luce prodotta da una fiamma avvivata dal soffio di un cannello da smaltatore Fraunhofer osservò molte linee chiare, e ciò che è più interessante la parte anteriore di questa fiamma è d' una luce *composta di raggi omogenei non decomponibili dal prisma*, scoperta che può essere d' una utilità grandissima per molte ricerche ottiche, essendo assai difficile il procurarsi della luce omogenea radiante in qualunque direzione.

Pare che l' apparenza delle linee nere nello spettro sia dovuta all' assorbimento che soffre la luce nei mezzi che attraversa, e per

ciò si considerano le linee nere come luoghi di raggi *deficienti*. Sir D. Brewster, che ha analizzato lo spettro solare con maggior successo, ha fatto l'importante osservazione che le linee nere crescono in numero quanto più il sole è vicino all'orizzonte, cioè quanto più è estesa la porzione d'aria atmosferica che la luce ha attraversato. La luce, la cui refrangibilità corrisponderebbe alle linee nere, sarebbe dunque quella che è stata distrutta od assorbita dalla nostra atmosfera, da quella del sole, delle stelle, od in generale dai mezzi pei quali è passata. Ciò che conferma questa spiegazione si è che lo spettro della luce di una candela o d'una lampada che, venendoci attraverso un breve spazio d'aria, non presenta, esplorato con un semplice prisma, alcune linee nere, diviene striato da un gran numero di queste linee se si è fatto prima passare attraverso del gas acido nitrico, o dei vapori del bromo, dell'iodio o del cloro, come Sir D. Brewster ed il Prof. Miller hanno ritrovato.

8. Che la diversa refrangibilità sia una proprietà inerente ai raggi si può confermare facendo subire ad essi delle nuove rifrazioni: allora si scopre che quelli che hanno subito una stessa rifrazione la prima volta, sempre si accompagnano e stanno uniti senza più sparpagliarsi nelle rifrazioni seguenti.

Newton per verificare questa proprietà, oltre a molti altri, eseguì il seguente esperimento. Fece cadere lo spettro formato da un primo prisma sopra un secondo prisma in modo che la larghezza dello spettro fosse parallela allo spigolo dell'angolo rifrangente del secondo prisma, cioè ponendo l'asse del secondo prisma ad angolo retto con quello del primo. Se i raggi di luce delle diverse parti dello spettro potessero ancora subire, come i raggi bianchi, una rifrazione diversa, l'effetto di questo secondo prisma sarebbe di dilatare nel verso della sua lunghezza il primo spettro per cui il secondo verrebbe ad assumere la forma di un quadrato (Fig. 22). Ma niente di ciò è succeduto. Il secondo spettro è venuto a disporsi secondo la diagonale del quadrato, di cui parliamo, conservando la stessa lunghezza, mostrando così che i raggi, che furono meno rifratti la prima volta, lo sono stati anche la seconda, come quelli che lo furono maggiormente lo sono stati nella stessa proporzione, anche la seconda.

Newton situò un terzo prisma e poi un quarto uno dietro l'altro per moltiplicare le rifrazioni laterali, e sempre i raggi, che hanno mostrato un certo grado di refrangibilità, hanno conservato lo stesso grado e sono rimasti uniti in tutte le rifrazioni successive.

9. Newton dopo d'aver mostrato che la luce bianca si scompone colla rifrazione in luci di varii colori, fece viceversa osservare che dalla mistura delle varie luci nella proporzione che si trovano nello spettro risulta la luce bianca. È per questa ragione che avviene, che facendo penetrare in una camera oscura per un foro di una certa grandezza un pennello di luce, e ricevendo l'immagine rifratta da un prisma su di un piano ad una piccola distanza dietro di esso, non si osserva più uno spettro dipinto di varii colori in tutta la sua larghezza, ma bensì bianco nel mezzo. Questo effetto proviene da che i raggi diversamente rifrangibili dei varii colori, che sortono dal prisma con direzioni diverse, non hanno corso uno spazio sufficiente per allontanarsi di tanto da progettare delle immagini abbastanza separate. Verso il mezzo dello spettro le varie immagini colorate vengono a sovrapporsi le une alle altre, e colla loro mistura formano la luce bianca. Verso le estremità dello spettro non trovandosi sovrapposte immagini di tutti i colori, ma da una estremità sporgendo quelle dei colori meno rifrangibili o rossi, dall'estremità opposta quelle de' colori più refrangibili o violetti, la loro separazione diviene percettibile, ed i bordi dello spettro si osservano colorati corrispondentemente.

Per verificare in un modo più decisivo questa conclusione Newton rifranse con un primo prisma un pennello di luce introdotto da un piccolo foro e ne ricevette l'immagine dello spettro, in cui i colori erano già sensibilmente separati (Fig. 23) sopra un secondo prisma della stessa sostanza e dello stesso angolo rifrangente, ma posto in situazione inversa. La seconda immagine dello spettro formata da questo secondo prisma, che ricevette come luce incidente l'immagine del primo spettro, divenne perfettamente bianca e rotonda. Anche concentrando in un sol fuoco tutti i raggi dei diversi colori di uno spettro per mezzo di una lente o di uno specchio, Newton formò della luce bianca. In questo modo la natura della luce bianca fu provata per analisi e per sintesi, producendo con essa la serie dei colori che manifesta il prisma, e ricomponendo con questi colori la luce bianca riunendoli assieme col sovrapporre le immagini formate da ciascuno di essi.

10. Secondo quest'analisi Newton ebbe l'idea che i colori tutti della natura o delle arti possano imitarsi con un composto dei sette colori, che si distinguono nello spettro solare, in cui uno o l'altro di questi colori predomina, e gli altri contribuiscono a dargli una tinta particolare, ed ha dato una regola empirica che

serve a farci conoscere quale sarà il colore composto che risulta dalla sovrapposizione di varie parti dei colori prismatici. Ecco la regola. Dividasi la circonferenza di un circolo in sette parti proporzionali ai numeri $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{9}$ (1), così che la prima parte DE, (Fig. 24) corrispondente al rosso sia di 60°. 45′, la seconda EF, all'aranciato, sia di 34°. 11, la terza FG, al giallo sia di 54°.11; la quarta GA pel verde di 60 . 46′, la quinta AB pell'azzurro di 54°. 41, la sesta BC pell'indaco di 34°. 11, e la settima CD pel violetto di 60°. 45′.

Siano p, q, r, s, t, v, x i centri di gravità dei sette archi suddetti, s'immagini a ciascuno di questi punti applicato un peso proporzionale all'intensità o quantità di color corrispondente che deve entrare come elemento nella tinta da farsi colla mistura dei dati colori, e che si suole determinare. Cercando il centro di gravità Z di tutti questi pesi, ed unendo il centro O del cerchio col punto Z per mezzo del raggio OZY, il punto Y dove questo raggio taglierà la circonferenza indicherà la natura del colore della tinta composta. Così Y, cadendo nella figura, fra E ed F ma più vicino ad E che ad F, ciò vorrà dire che il colore è aranciato, ma più tendente al rosso che al giallo. L'intensità della tinta è poi proporzionale ad OZ distanza del punto Z dal centro: essa è tanto meno intensa, e s'avvicina al bianco quanto più il punto Z si accosta al centro: se il centro di gravità Z cadesse nel centro stesso del cerchio, ciò vorrebbe dire che la luce è bianca.

Da questa costruzione appare, che ciascuna tinta od anche il bianco può risultare in diversi modi della mistura di più colori, perchè ai centri p, q, r, v ec. si possono applicare diversi pesi combinati in proporzioni tali che abbiano il loro centro di gravità sullo stesso raggio, od anche nello stesso punto. Due colori semplici o composti, che abbiano il loro centro di gravità nel centro del cerchio e producano il bianco, si chiamano colori *complementarii.* (Vedasi la Nota II).

11. Newton osservando, che nelle rifrazioni ciascuna specie di colore è invariabilmente connessa con un grado di refrangibilità

(1) Questi numeri sono proporzionali ai sette intervalli che risultano dalla scala diatonica citata all'art. 2, dai quali si avrebbe $\frac{XU - XS}{XU} = \frac{1}{9}$; $\frac{XS - X\alpha}{XS} = \frac{1}{16}$; $\frac{X\alpha - XV}{X\alpha} = \frac{1}{10}$, ec.

particolare, è stato condotto ad inferire che il grado di refrangibilità è una qualità inerente al colore, e che i raggi di uno stesso colore sono indecomponibili e perciò semplici. Questa conclusione non sarebbe però necessaria. Anche quando ciascuna minima parte dello spettro fosse composta di colori differenti, se i raggi componenti fossero egualmente refrangibili, non si potrebbero mai dividere per via di rifrazione, ma potrebbero essere separati per altri mezzi. Vedremo nella Lezione seguente altre osservazioni che Sir D. Brewster ha fatto, e le conclusioni differenti che ha tratto a questo proposito.

LEZIONE XXV.

Della luce assorbita e diffusa, e dei colori dei corpi.

1. Le leggi, che determinano la direzione della propagazione della luce regolarmente riflessa, sono indipendenti dalla natura delle superficie riflettenti (Lez. XXIII, art. 8); quelle che danno la direzione della propagazione della luce rifratta cominciano a dipendere da un elemento collegato colla natura del mezzo, che è l'indice di rifrazione (Lez. XXIII, art. 10); e la dispersione della luce ci ha poi fatto conoscere (Lez. XXIV), che il valore di quest'indice è differente, anche per uno stesso mezzo, per luci di diverso colore. La nessuna influenza della superficie nel primo caso, l'influenza unica del mezzo su di un solo elemento nel secondo caso, danno alle suddette leggi di riflessione e rifrazione il grado di semplicità, di cui godono. Non così avviene rispetto alle leggi che regolano le quantità di luce assorbita, diffusa, riflessa e rifratta, non che a quelle che determinano la colorazione che la luce spesso riceve nelle tre ultime circostanze. La natura dei corpi, quella delle superficie riflettenti o dei mezzi rifrangenti influiscono grandemente sulle leggi che regolano tanto le quantità di luce assorbita, come le quantità ed i colori delle luci riflesse, rifratte e diffuse, e lo stato poco avanzato delle nostre cognizioni sull'azione dei corpi nel modificare la luce non ci ha permesso fin'ora che di scoprirle in pochi casi, che esporremo in altra Lezione. In generale però queste leggi ci sono ancora ignote, ed i Fisici non sono per anco d'accordo nell'assegnare le specie d'azioni che i corpi esercitano, allorchè la luce è assorbita, diffusa, riflessa, rifratta, o diviene colorata. Dovremo quindi limitarci in questa Lezione a dare un'idea delle opinioni più plausibili che sono state emesse intorno a queste complicate questioni.

2. Cominciando dalla luce assorbita nei mezzi *trasparenti*, cioè in quei mezzi, attraverso ai quali si scorgono le immagini dei corpi esteriori, si può osservare che questi mezzi, sieno o no colorati, come sarebbero certi vetri rossi, verdi, azzurri, e molti liquidi, essi sono sempre tali che ridotti ad un grado sommo di sottigliezza trasmettono la luce bianca quasi nella sua totalità e insensibilmente incolorata. A misura che la lamina trasparente cresce di grossezza, la luce emergente diminuisce d'intensità e si tinge di un colore più pronunciato. La diminuzione successiva dell'in-

tensità di luce ci prova adunque che, di mano in mano che essa va trascorrendo il mezzo, una porzione sempre più crescente è estinta nel cammino, o come si dice *assorbita*. Quest' assorbimento fu attribuito dai Fisici che avevano adottato il sistema dell'emissione, all'essere una quantità degli atomi luminosi attratti dalle molecole del corpo, ed arrestati nell' attraversare il corpo: mentre i Fisici che ora seguono il sistema delle ondulazioni lo risguardano come una distruzione della quantità di forza viva del movimento vibratorio in cui consiste la luce. È evidente che, considerando i corpi, come abbiamo spesso ripetuto, quali sistemi di molecole in equilibrio stabile, la quantità di forza viva dell'etere nel raggio incidente non può essersi consunta (1) senza aver eccitato nelle molecole del mezzo, od in altre porzioni di etere, un' altra quantità di forza viva corrispondente.

3. I Fisici spiegano per mezzo di quest' assorbimento anche la colorazione che riceve la luce nell' attraversare le sostanze diafane colorate. Per tale effetto suppongono che l' assorbimento non sia eguale per le luci di diverso colore: che i raggi di certi colori siano assorbiti in maggiore, quelli di altri colori in minore quantità, per cui all' uscire dal cristallo non trovandosi più nelle proporzioni che formano la luce bianca, la luce trasmessa appare del colore complementario a quello che formerebbero i raggi che sono stati più abbondantemente assorbiti.

Non è difficile d' immaginare un' ipotesi plausibile d' assorbimento, dalla quale, coll' applicazione del calcolo, si possa dedurre una nozione più definita del modo con cui si opera l' effetto ora descritto. Perciò bisogna comincinciare dal supporre che la luce incidente sia tutta di un solo colore. Secondo abbiamo già osservato, la quantità di luce assorbita cresce all' aumentare della grossezza del mezzo che attraversa; e l' ipotesi più plausibile che si possa assumere si è che, per ogni lamina del mezzo d' egual grossezza, venga assorbita una parte aliquota della totalità della luce che vi è entrata.

Secondo quest' ipotesi se immaginiamo il mezzo diviso in un grandissimo numero di strati d' egual altezza, tutti sottili quanto ci piace, mentre le lamine anderanno crescendo di numero in proporzione aritmetica, le corrispondenti quantità di luce che verranno ad attraversarle anderanno diminuendo in proporzione geometrica, poichè i termini che le rappresenteranno diminuiranno

(1) Vedasi i numeri 2 e 3 della Nota I alla Lez. XI.

ciascuno di una parte proporzionale al valore del termine precedente. Se quindi immaginiamo, come all'art. 6 della Lezione XVIII, disposti in una colonna verticale i numeri degli strati che la luce ha attraversato, ed a lato di essi, in un'altra colonna, le intensità delle luci corrispondenti, le due serie di numeri formeranno una tavola antilogaritmica. Indicando con I l'intensità della luce incidente, con $1-q$ la quantità proporzionale di luce che viene assorbita da ogni lamina, talchè q sia soltanto la porzione che esce dallo strato, l'intensità I verrà ridotta ad Iq dopo passato il primo strato, ad Iq^2 passato il secondo strato, ad Iq^3 passato il terzo, e così successivamente, onde dopo un numero m di strati si ridurrà ad Iq^m. Se quindi dinotiamo con $I.a$ la porzione di luce rimasta dopo che ha passato una grossezza uguale all'unità, e con m il numero degli strati componenti questa grossezza, dovrà essere

$$I.a = I.q^m, \text{ e perciò } q^m = a.$$

Rappresentando poi con x una grossezza qualunque contenente n strati, talchè questa grossezza sia in unità di lunghezza espressa da $x = \frac{n}{m}$, sarà l'intensità i della luce, al sortire della grossezza x, data da

$$(a) \qquad i = Iq^n = I(q^m)^{\frac{n}{m}} = Ia^x.$$

Ciò posto siano I_1, I_2, I_3 ec. le intensità delle luci dei diversi colori componenti lo spettro fatto dalla luce bianca solare, od in generale dei diversi colori componenti le luci del raggio incidente all'entrare nel mezzo, sarà

$$(1) \qquad I_1 + I_2 + I_3 + \text{ec.}$$

l'intensità totale di questo raggio; e dinotando con a_1, a_2, a_3 ec. le frazioni proporzionali, alle quali si riducono le intensità delle rispettive luci dopo che hanno attraversato una grossezza del mezzo eguale all'unità, l'intensità della luce componente il raggio emergente, che si ottiene coll'applicare successivamente la formola (a), a ciascun colore, sarà data da

$$(2) \qquad I_1 a_1^x + I_2 a_2^x + I_3 a_3^x + \text{ec.}$$

Ogni termine darà l'intensità del rispettivo colore, e combinando poi colla regola empirica di Newton (Lez. XXIV, art. 10) le intensità parziali di questi colori si avrà la tinta composta, od il color risultante della luce trasmessa.

Il rapporto di ciascuno degli esponenziali a_1^x, a_2^x, a_3^x ec, nei termini della formola (2), all'unità, o sia al termine corrispondente nella formola (1), rappresenta l'intensità del color rispettivo nel raggio emergente all'intensità dello stesso colore nel raggio incidente. Le quantità a_1, a_2, a_3 ec. essendo per loro natura delle frazioni, i suddetti esponenziali anderanno decrescendo di valore coll'aumentare della x. Quella fra le quantità a che sarà più prossima all'unità darà un esponenziale a^x, che decrescerà meno rapidamente coll'aumentare della x, ed il termine contenente quest'esponenziale verrà dopo un certo valore di x ad avere un valore superiore a quello di tutti gli altri. Il colore corrispondente a quella quantità a il cui valore è massimo, prevalerà dunque alla fine nella luce trasmessa, e farà apparire il mezzo di questo colore.

4. Per un valore minore di x può avvenire che la tinta risultante dalla composizione degli altri colori abbia un'intensità assai sensibile, e talvolta anche più forte di quella del color corrispondente al termine che si considera. In questo caso una tinta può apparire nella luce trasmessa quando il mezzo abbia una piccola grossezza, ma questa tinta verrà ad essere diversa, e talvolta anche presso che complementaria, quando la grossezza del mezzo sarà sufficientemente cresciuta. Questi mezzi si chiamano *dicromatici*. Di questa specie sono, per esempio, la soluzione di solfato di potassa satura con eccesso di carbonato d'ammoniaca, che passa dall'azzurro al violetto, e quelle di muriato di rame, di magnesiato di potassa, di cloruro di cromo che, guardate attraverso di strati di grossezza sempre più crescente, passano dal verde al rossastro.

5. Se dopo che la luce ha attraversato un primo mezzo di una grossezza x, le si fa attraversare un secondo mezzo d'una grossezza y, è evidente che i valori di I_1, I_2, I_3 ec., che nella formola (2) rappresentano le intensità delle luci dei diversi colori all'incidenza, verranno ad essere pel secondo mezzo $I_1 a_1^x$, $I_2 a_2^x$, $I_3 a_3^x$, ec., perchè la luce si presenta al secondo mezzo coll'intensità che ha sortendo dal primo. Indicando così con b_1, b_2, b_3 ec. le parti proporzionali delle luci emergenti dei diversi colori per una grossezza eguale all'unità del secondo mezzo, e sostituendo $I_1 a_1^x$, $I_2 a_2^x$, $I_3 a_3^x$ ec. ad I_1, I_2, I_3 ec.; e b_1^y, b_2^y, b_3^y ec. ad a_1^x, a_2^x, a_3^x ec. nella formola (2), si avrà per l'espressione dell'intensità della luce del raggio, all'uscire dal secondo mezzo, la formola

$$(3) \qquad I_1 a_1^x b_1^y + I_2 a_2^x b_2^y + I_3 a_3^x b_3^y \text{ ec.}$$

I mezzi assorbenti esercitano bene spesso un'azione meno efficace

su due o più specie di luci colorate, alle quali danno un adito più libero. Questa formola ci mostra che impiegando due mezzi o vetri colorati, ciascuno dei quali dia adito in maggior abbondanza ai raggi di due colori, dei quali uno solo sia comune ai due vetri, si può ottenere della luce sensibilmente pura di questo color comune. Infatti se a e b sono i coefficienti corrispondenti al color comune meno assorbito, ed i cui valori siano i più prossimi all' unità, il termine $I a^x b^y$ corrispondente a questo colore supererà in grandezza tutti gli altri termini che diverranno assai piccoli, tosto che x ed y rappresentino delle grossezze un po' considerevoli, e il raggio trasmesso sarà sensibilmente composto della luce del colore del termine sopra considerato. È così che, combinando un vetro di color azzurro con un vetro di color bruno puro, si può ottenere della luce trasmessa rossa assai omogenea.

Sarebbe facile il proseguire a trovare le formole corrispondenti a tre o più mezzi assorbenti, ma non crediamo opportuno il fermarsi su queste deduzioni, non che su d' altre facili applicazioni che offrirebbero le formole trovate.

6. L' assorbimento ineguale delle luci di diverso colore era attribuito dai Fisici, che adottavano il sistema dell' emissione, ad una differente affinità fra le molecole del mezzo e gli atomi luminosi appartenenti alle diverse specie di colori; talchè gli atomi dei colori più assorbiti erano quelli che venivano più facilmente attratti ed in maggior numero arrestati nel loro cammino. Nel sistema delle ondulazioni conviene ammettere che il mezzo, risultante dall' unione dell' etere e delle molecole ponderabili disseminate in esso (1), divenga per causa delle loro azioni reciproche meno atto a vibrare per quelle specie d' ondulazioni luminose che corrispondono ai colori assorbiti, di quello lo sia per le ondulazioni che danno i colori della luce più abbondantemente trasmessa. La regolarità delle forme delle immagini che si scorgono attraverso i mezzi diafani, che ora consideriamo, ci manifestano però che il mezzo si presta a trasmettere una gran parte delle vibrazioni come se fosse un solo sistema elastico, senza alterare sensibilmente la direzione della propagazione delle onde, e senza confonderle fra loro.

6. Alcuni mezzi, ed in generale i corpi opachi, quando sono ridotti ad un certo grado di sottigliezza danno pure passaggio ad una porzione di luce, senza però lasciar vedere attraverso le immagini

(1) Vedasi l' articolo 1. della Lezione XXVI, e gli artcoli 7 e seg. della Lezione XXVII.

dei corpi, che la inviano; questi mezzi si dicono *translucidi*. Essi offrono spesse volte nel loro tessuto o composizione un'eterogeneità di parti, e pare che in questi casi la mancanza delle immagini sia dovuta a delle rifrazioni, e fors'anche a delle riflessioni, che i raggi subiscono, senz'ordine regolare, nell'interno durante il loro passaggio, e che alterano confusamente la direzione della loro propagazione. In altri casi queste rifrazioni e riflessioni danno probabilmente origine a dei disturbi d'equilibrio fra le molecole e l'etere, i quali fanno nascere delle vibrazioni proprie nelle molecole, che causano delle nuove ondulazioni corrispondenti nell'etere circostante; queste ondulazioni, appartenendo ad una od altra specie di colore, compongono con le ondulazioni preesistenti una luce emergente, che dà un color proprio al mezzo. Tale forse è la causa dei colori che si scorgono nella luce emergente dalle foglie sottilissime d'oro e d'altri metalli, quando, applicate per sostegno ad una lamina di cristallo bianco, sono guardate attraverso in faccia alla luce. L'oro per esempio visto per trasmissione appare di color verde-azzurro.

7. Queste considerazioni ci aprono il passo a dir qualche cosa dei colori proprii di cui appajono vestite le superficie dei corpi. Per poco che la superficie di un corpo sia liscia una quantità di luce è regolarmente riflessa, o come si dice, specolarmente; questa luce però è bianca o del colore della luce incidente, e se tutt'al più si scorge qualche traccia del color del corpo riflettente, essa non è che una tinta assai leggera: un'altra parte della luce è invece diffusa tutt'all'intorno, e questa assume comunemente un color distinto, che si risguarda come proprio del corpo. In alcuni casi, come nei liquidi e vetri colorati trasparenti, questo colore è analogo a quello della luce trasmessa, ma cambia d'intensità, secondo che si guarda la superficie più o meno obliquamente. In questi casi pare che la colorazione sia dovuta al venir la luce riflessa successivamente anche dagli strati interni del corpo sino ad una certa minima profondità, e che quindi la colorazione dipenda, come quella della luce trasmessa, dall'inattitudine del mezzo a prestarsi a quelle vibrazioni che darebbero il colore complementario di quello che si vede. In altri casi, come sarebbero quelli delle penne di color cangiante di varii volatili, delle ali d'alcuni insetti, delle scaglie dei pesci ec., il colorarsi è dovuto ad una causa segnalata da Newton, di cui faremo il soggetto di parte di una prossima Lezione. Ma questi

casi non sono quelli della luce che propriamente si chiama diffusa. In qualunque direzione si guardino le superficie dei corpi illuminati che si scorgono per luce diffusa, questa luce appare di color costante, e questa proprietà dà alla luce diffusa uno dei caratteri della luce emessa dai corpi luminosi, quello cioè di diramarsi in raggi secondo tutte le direzioni. Eulero, che si distinse nel secolo passato nel segnalare le incongruenze del sistema dell'emissione, allorchè questo sistema era vigorosamente sostenuto, e tenacemente difeso dalla pluralità dei Fisici, indicò il primo come la colorazione propria della superficie dei corpi può concepirsi effettuata nel sistema delle ondulazioni. Seguendo le analogie fra la propagazione del suono e quella della luce, egli paragonò la luce regolarmente riflessa all'eco, e la luce diffusa alle risonanze. Abbiamo notato all'articolo 9 della Lezione XXII che, quando l'aria è posta in vibrazione e produce un certo suono, anche le corde poste nelle vicinanze, che sono tese all'unisono, o possono dare dei suoni armonici, entrano in vibrazione per comunicazione, e producono un suono loro proprio. Nello stesso modo le molecole poste nelle superficie dei corpi, spinte dalle varie vibrazioni che eseguisce l'etere nello stato d'illuminazione, cedono a quelle la cui durata è eguale, od è un multiplo o submultiplo di quella con cui esse stesse possono vibrare intorno alla loro situazione d'equilibrio stabile. Con queste loro vibrazioni danno origine a delle nuove ondulazioni, che si propagano nell'etere esteriore per ogni verso, e queste eccitano la sensazione particolare del colore che loro corrisponde, e che è il color permanente del corpo. Ciò che rende questo modo di concepire la produzione dei colori dei corpi più verosimile, si è la considerazione, che, come venne dimostrato nella Lezione XV trattando della capillarità, la densità dei corpi è estremamente decrescente nelle ultime prossimità insensibili delle superficie, dove le molecole sono assai diradate, ed esercitano fra loro un'attrazione reciproca diretta secondo le superficie stesse; dal che ne segue che il loro sistema presenta pochissima inerzia, ed una disposizione a vibrare parallelamente alla superficie del corpo.

8. I fenomeni della fosforescenza per insolazione vengono in conferma di questo modo di vedere. Si sa che il diamante, lo spato fluore verde o violetto di Siberia, il solfato di barite mediocremente calcinato, detto comunemente fosforo di Bologna, il fosforo di Cantù, formato da una parte di zolfo e tre di squamme

d'ostriche calcinate, esposti per 10 o 12 secondi di tempo alla luce divengono fosforici, cioè trasportati nell'oscurità emettono luce per un certo tempo più o men lungo, e talvolta per qualche ora. La fosforescenza è assai notevole nelle sostanze ora indicate ed in alcune altre, ma non è loro particolare. Dufay e Beccari (1) hanno provato che quasi tutte le sostanze solide esposte ad una forte luce, e trasportate immediatamente nell'oscurità sono nei primi istanti luminose per un occhio che si sia preparato prima a scorgerle, stando per qualche tempo nelle tenebre. Quest'effetto non saprebbe concepirsi meglio che supponendo che le molecole dei corpi, poste in vibrazione dall'azione della luce, continuano a vibrare per qualche tempo dopo. Se le molecole che sono state poste in vibrazione sono quelle poche che, assai diradate, si trovano nella superficie dei corpi, la loro forza viva debb'essere ben presto diminuita ed assorbita dalle reazioni delle molecole interne e dell'etere che le circonda, e le ondulazioni che quelle molecole potrebbero ancora eccitare colla forza viva rimasta loro, essendo troppo deboli, non saranno più atte a produrre la sensazione della luce. Se le molecole che sono state poste in vibrazione sono in maggior numero, così che vi abbiano preso parte anche quelle che sono più interne, la riduzione della loro forza viva procederà più lentamente. Questa circostanza, e la natura diversa delle forze che tendono a ricondurre le molecole alla loro situazione d'equilibrio spiegano come alcuni corpi tornano oscuri in un tempo brevissimo, quando cessa l'azione della luce incidente, e come altri conservano la fosforescenza per un tempo più o meno lungo (2).

(1) J. B. Beccarii. De quampluribus phosphoris nuno primum detectis. Comment. Bonon. Tom. II. Parte II pag. 136. Parte III pag. 498, Tom. III pag. 105 e Tom. IV peg. 74.

(2) Il sig. Melloni, che nella sua recente Memoria precedentemente citata ha adottato ed esteso le viste d'Eulero sulla causa dei colori propri dei corpi, ha molto a proposito fatto osservare che si può spiegare con questi principii il fenomeno osservato dai Sigg. Biot e Bequerel, che l'irradiazione calorifica di un ferro, la cui temperatura non sia stata portata all'incandescenza, può sviluppare la fosforescenza nelle scaglie d'ostriche calcinate, che l'avessero già perduta per essere rimaste qualche tempo nell'oscurità. Le ondulazioni calorifiche dell'etere, sebbene più lente di quelle luminose, possono però sviluppare nelle molecole delle ostriche calcinate delle vibrazioni più rapide, od accrescere la velocità di quelle che per la loro piccolezza non erano più atte a produrre una luce sensibile, ogni qual volta la durata delle dette ondulazioni sia un multiplo della durata delle vibrazioni che le molecole della sostanza fosforica

9. Prima di terminare questa Lezione conviene che esponga come Sir D. Brewster, che ha arricchito notabilmente l'Ottica colla scoperta di molti fenomeni, ha esplorato lo spettro solare col mezzo dell'assorbimento. Questo ottico distinto, adottando i principii che abbiamo esposti agli articoli 2 e 3, ebbe il pensiero di esaminare lo spettro solare attraverso dei vetri colorati. Impiegando per esempio un vetro azzurro, di quelli che si usano per gli occhiali destinati a temperare una luce troppo viva, e guardandovi attraverso vide che lo spettro prendeva un aspetto notevole, mancante di certi colori. « Una specie di oscurità copriva il « mezzo del rosso; tutto l'aranciato ed una gran parte del verde « erano scomparsi, e rimaneva una parte considerevole del tur« chino, un po' d'indaco e ben poco di violetto. Il giallo per lo « contrario non era stato che debolmente assorbito, ed aveva « aumentato di larghezza. Da una parte occupava lo spazio che « nello spettro naturale appartiene all'aranciato, e dall'altra parte « quello appartenente al verde » (1). Da ciò conchiuse che il vetro aveva assorbito la luce rossa che mescolata colla gialla formava l'aranciato, e la luce turchina che mescolata colla gialla formava il verde. I raggi gialli, e dei colori verso l'estremità violetta essendo quelli che passavano in maggior abbondanza, dalla loro riunione ne veniva a risultare, secondo la regola empirica di Newton, il color azzurro trasmesso dal vetro, quando era esposto alla luce bianca. Nel luogo dello spettro naturale, dove si vedeva l'aranciato ed il verde, esiste dunque il giallo. Impiegando altri vetri, che assorbivano i colori in diverse proporzioni, Sir D. Brewster assicura d'essere riuscito, non solo a mettere in evidenza l'esistenza del giallo, del rosso e dell'azzurro lungo tutto lo spettro naturale, dove si trovano misti in varie proporzioni, ma anche a segregare in qualche parte di esso della luce bianca, tutta egualmente rifrangibile. (2) Considerando il colore come una qualità inerente alla

possono esegnire obbedendo alle loro forze molecolari, giusta come un suono più grave può eccitare una risonanza nelle corde armoniche che siano all'ottava alta, alla quinta di qnest'ottava ec. Se qnesto rapporto di multiplicità manca, le radiazioni calorifiche non darebbero più origine al fenomeno: così i Sigg. Biot e Bequerel hanno trovato, che le radiazioni d'un vaso ripieno d'acqua bollente non ridestavano più sopra le ostriche calcinate alcun grado apprezzabile di fosforescenza.

(1) Anche G. B. Venturi notò dei fenomeni simili assai interessanti, che descrisse in un Opuscolo *Indagine fisica dei colori*. Modena 1801.

(2) Dagli scritti di Sir D. B. non ho potuto raccogliere se l'eguale refrangibilità di queste luci sia stata verificata direttamente per rifrazione, o se sia

luce, Sir. D. Brewster conchiuse che i colori e la luce bianca, messi a nudo ne' suoi esperimenti, già esistono frammisti nelle varie parti dello spettro solare, e che quindi la luce nelle stesse parti non sia omogenea rispetto al colore. Dietro queste conclusioni egli fece rivivere, con nuovi argomenti, un'antica opinione emessa dal P. Castel, da Mayer e da altri, che la luce dello spettro sia composta di soli tre colori, il rosso, il giallo, e l'azzurro.

La figura 25 rappresenta lo spettro come lo immagina Sir D. Brewster. « Le tre curve *M R N*, *M Y N*, *M B N* disegnano tre « spettri primitivi della stessa lunghezza, *uno rosso*, *uno giallo*, « *ed uno azzurro*, e fanno vedere la maniera con cui essi producono colla loro combinazione i sette colori secondarii o composti « sviluppati dal prisma. Lo spettro rosso ha il suo massimo d'intensità in *R*, dove l'ordinata della curva è massima; questa intensità diminuisce rapidamente andando verso *M* o verso *N* ed « in questi punti svanisce. Lo spettro giallo ha il suo massimo « d'intensità in *Y*, e questa si riduce a zero in *M* ed *N*: lo spettro « azzurro è più intenso in *B*, e svanisce parimente in *M* ed *N*. La « curva generale che rappresenterebbe l'intensità totale della luce « sarebbe esterna alle tre curve, e la sua ordinata in un punto « qualunque sarebbe eguale alla somma delle tre ordinate delle tre « curve nello stesso luogo. Così l'ordinata della curva generale « in *Y* è eguale a quella della curva del giallo, che si può supporre 10; più quella della curva del rosso, che può essere 2, « più quella della curva dell'azzurro che può essere 1; onde l'ordinata generale sarebbe 13. Ora supponendo che tre parti di « giallo, due di rosso ed una d'azzurro formino il bianco, il colore « in *Y* sarebbe eguale a $3 + 2 + 1$, od a sei parti di bianco, « mescolate a sette di giallo, cioè la tinta composta in *Y* sarebbe « un giallo reso brillante dalla luce bianca senza alcuna mistura di « rosso o d'azzurro. Come questi colori occupano tutti lo stesso « luogo dello spettro, e godono dello stesso grado di refrangibilità, « non possono più essere separati da altri prismi, e perciò, se si « trovasse un vetro che assorbisse sette parti di giallo, rimarrebbe « nel luogo *Y* una luce bianca indecomponibile dal prisma. »

Anche Fraunhofer, come abbiamo riferito all'articolo 7 della precedente Lezione, ha riconosciuto che la luce emessa dalla parte

stata semplicemente arguita dall'apparire proveniente da una stessa parte dello spettro. In questa seconda supposizione potrebbe nascere il dubbio che la luce osservata fosse composta di quella trasmessa e di qualch'altra eccitata nel mezzo, secondo le idee esposte agli articoli 6, 7 e 8.

anteriore della fiamma a olio avvivata dal soffio di un cannello da smaltatore è composta di *raggi omogenei ed egualmente refrangibili*, e lo stesso Brewster ha trovato che la fiamma di un pezzo di spugna, che arde inzuppato di alcool diluito con acqua salata, dà pure una luce *mono-cromatica.* Questi fenomeni meritano lo studio e l'attenzione dei Fisici pei lumi che possono somministrare sulle cause che influiscono a far variare le sensazioni dei colori. Frattanto dobbiamo tener presente, che la luce, che ha attraversato dei mezzi trasparenti colorati, o che è stata prodotta da lumi artificiali, prossimi a noi, potrebbe essere bianca, o colorata in un modo diverso che nello spettro solare, e godere ciò non ostante di uno stesso grado di refrangibilità.

LEZIONE XXVI.

Principii fondamentali del sistema delle ondulazioni.

1. I fatti relativi alla propagazione della luce sì diretta, che riflessa, rifratta, dispersa od assorbita, che abbiamo fatto conoscere nella precedente Lezione, sono già in numero sufficientemente grande per farci sentire la necessità di riguardarli sotto un sol punto di vista, di riunirli in una teoria, e farci indagare come possano essere prodotti per mezzo di movimento, unico modo che ci è dato, per concepire la produzione de' fenomeni.

Siccome già abbiamo annunciato, l'ipotesi che andiamo ad assumere per ispiegare i fenomeni ottici, è quella che la luce si propaghi, a similitudine del suono, per le ondulazioni di un mezzo elastico. Per far vedere come questa ipotesi si piega alla spiegazione de fenomeni, conviene che cominciamo ad esporre le proprietà di cui si deve supporre dotato il mezzo di trasmissione, ed il modo con cui le ondulazioni si propagano in esso.

2. Il fluido elastico che è posto in vibrazione dai corpi luminosi, ed a cui si dà comunemente il nome di *etere* deve essere supposto, riempire tutto lo spazio vuoto, e nei corpi circondare le molecole e riempire gli intervalli che le separano fra loro. Secondo le leggi che la meccanica dimostra, un movimento od un tremito eccitato in una benchè menoma parte di un volume d'etere omogeneo diffuso in uno spazio privo di materia ponderabile si propaga secondo tutte le direzioni con una velocità uniforme, agitando ad ogni istante gli atomi che sono sulla superficie sferica a cui il tremito è giunto, e passando avanti nell'istante seguente ad agitare gli atomi sulla superficie sferica successiva, lasciando tornare in riposo quelli che erano sulla superficie precedente. La velocità con cui questi tremiti si trasmettono da una superficie all'altra è tanto più grande quanto più l'elasticità del mezzo è maggiore paragonata colla sua inerzia, cioè è tanto maggiore quanto più elastico è il mezzo, e quanto esso è meno denso. Di qui è che essendoci risultato dalle osservazioni che la velocità con cui si trasmette la luce è sommamente grande, dobbiamo assumere che l'etere in cui una sì grande velocità di propagazione succede, sia eminentemente elastico ed estremamente raro.

3. Per concepire il modo e seguire col pensiero il corso con cui i tremiti vanno estendendosi tutt'all'intorno trascorrendo il mezzo elastico, richiameremo alcune proprietà delle superficie curve, che sono mirabilmente atte a darci un' immagine del fenomeno.

Si dimostra in geometria che, se si ha una superficie curva la quale supporremo dotata di un centro e rientrante, e che da tutti i punti di questa superficie, come tanti centri, si descrivano altrettante superficie simili alla prima e similmente poste, di grandezza arbitraria ma tutte eguali, tutte queste superficie si tagliano consecutivamente in tanti punti in modo che dalla riunione di questi punti ne nasce una nuova superficie affatto simile alla data, che le tocca e le abbraccia tutte, alla quale superficie si dà il nome di *inviluppante*.

Così se da tutti i punti di una superficie sferica $A\,B$, (fig. 26), si descrivono con un raggio arbitrario ma costante, tante sfere, la riunione di tutti i punti d' intersezione di queste sfere forma pure una sfera inviluppante $A'\,B'$, che le tocca tutte.

Se si avesse in vece un' elissoide $A\,B$, (Fig. 27), e da tutti i punti della sua superficie si descrivessero altrettante elissoidi simili e similmente poste alla data, e tutte eguali fra loro, dalla riunione delle loro intersezioni reciproche nascerebbe un'altra elissoide inviluppante $A'\,B'$, simile ma più grande di $A\,B$, che abbraccerebbe e toccherebbe tutte le piccole elissoidi già tracciate.

Immaginiamo ora che una superficie s' ingrandisca successivamente, aumentando in tutte le sue dimensioni con moto uniforme, e con velocità proporzionali alle sue linee omologhe, in modo da conservarsi sempre simile a se stessa; è evidente, dietro il principio geometrico premesso, che se supponiamo che in un dato istante questa superficie s' arresti dal crescere, e che nello stesso momento si sviluppino da tutti i suoi punti tante superficie simili che, cominciando da un' estensione nulla, vadano successivamente aumentando colle velocità della prima, conservandosi sempre simili alla data, ed eguali fra loro, la superficie inviluppante tutte queste sarà quella stessa che avrebbe prodotto la superficie data se avesse continuato ad ingrandirsi per un eguale intervallo di tempo.

4. La generazione delle superficie ora esposta è l' immagine di quello che succede nella propagazione dei tremiti nei mezzi elastici. A propriamente parlare in ogni istante ciascun atomo sulla superficie agitata dà origine col suo tremito ad una nuova superficie fluente, ma tutte queste superficie fluenti parziali si compongono nell' istante seguente nella superficie dell' onda che è la loro invi-

luppante comune, cioè quella che nasce dalla loro mutua intersezione, tutte le altre loro parti distruggendosi reciprocamente per movimenti contrarii. Si va così rifacendo ad ogni istante la superficie generale dell'onda, la quale si propaga come se esistesse sola, dilatandosi proporzionalmente al tempo. In generale però noi potremo considerare l'intera superficie dell'onda in un istante qualunque, come l'inviluppante di tutte le superficie fluenti parziali che sarebbero state generate dagli atomi, che hanno formato quella superficie in uno qualunque dei tempi precedenti.

Quanto diciamo dell'intera superficie è egualmente applicabile ad ogni sua porzione. Una porzione qualunque della superficie dell'onda può sempre considerarsi come l'inviluppante di tutte le superficie parziali generate dagli atomi che sono stati scossi precedentemente al passaggio della superficie di una stessa onda, sia nello stesso tempo, sia in tempi successivi, ma tali che giungano sulla superficie inviluppante contemporaneamente. Così se le superficie fluenti, generate dai tremiti degli atomi situati in 1, 2, 3, 4, 5, (Fig. 28, e 29), negli istanti che sono stati commossi dal passaggio della superficie dell'onda, sono tali che estendendosi giungono col loro movimento di propagazione, tutte alla superficie generale *C G* nello stesso tempo, esse formeranno la porzione d'inviluppante *C G*, che sarà quella, che completerà in seguito costantemente la superficie generale dell'onda.

Secondo queste considerazioni potremo quindi assumere per una porzione dell'inviluppante generale, quella che è formata da tutte le superficie fluenti parziali generate dagli atomi scossi precedentemente al passaggio della superficie di una stessa onda, e che siano tali che colla loro propagazione giungano nello stesso istante su la detta porzione.

5. L'immagine della propagazione di un tremito in un mezzo elastico, che abbiamo abbozzato, è applicabile a rappresentare un tremito che non duri che un istante indivisibile di tempo. Quantunque le vibrazioni che eseguiscono le molecole dei corpi luminosi siano di una brevità affatto minore ad ogni concetto che la nostra immaginazione possa formare (1), pure queste molecole,

(1) Per dare un'idea della brevità di queste vibrazioni, faremo osservare che ad ogni vibrazione si genera un'onda, e che questa, come nella teoria del suono (Lez. XXI art. 1) è della lunghezza che percorre la luce nel tempo della vibrazione. Ora da esperimenti, che faremo conoscere nel seguito, risulta che le lunghezze delle ondulazioni eterce visibili, cioè capaci da far impressione sul nervo ottico, sono comprese fra $0^m,000000406$ e $0^m,000000645$, e come la

come quelle dei corpi sonori, passano nelle loro vibrazioni per diversi stati, cominciando da una velocità nulla che per gradi successivi va crescendo sino a divenir massima, dopo di che decresce sino ad annichilarsi, per cominciare poi un' escursione retrograda, e compire la sua vibrazione. Una molecola vibrando passa così successivamente per più gradi di velocità diretta e retrograda. A ciascuno dei gradi di velocità, per cui passa la molecola, si può concepire che corrisponda la trasmissione nell' etere di un nuovo tremito, il quale si propaghi secondo una superficie simile, e dalla successione di tutte queste superficie scosse durante un' intera vibrazione risulta l' *onda luminosa*. Quest' onda si compone di due parti: una, nella quale gli atomi sono animati dalle velocità che provengono dalle azioni che li spostano dalla loro situazione naturale; l' altra, nella quale possedono le velocità contrarie durante l' appulso con cui ritornano al loro posto. Indicheremo col nome di semiondulazione *impulsiva* la prima parte dell' onda, e col nome di semiondulazione *appulsiva* la seconda. Le semiondulazioni impulsiva ed appulsiva si considerano in un mezzo di densità uniforme come perfettamente simili, e le velocità di cui sono animati gli atomi simmetricamente situati nell' una e nell' altra delle due metà dell' onda, come eguali, ma di direzione contraria; i diversi stati di vibrazione delle varie parti dell' onda si chiamano *fasi*. La lunghezza totale di un' ondulazione è, come nel suono, lo spazio che la luce percorre durante la vibrazione della molecola luminosa, o se si vuole, durante la vibrazione di uno qualunque degli atomi del raggio di luce, perchè ciascun' atomo rappresentando successivamente, durante la sua vibrazione, le diverse fasi dell' onda, il tempo della sua vibrazione è quello che l' onda impiega ad attraversare il luogo che occupa. Se quindi λ rappresenta la lunghezza di un' ondulazione, V la velocità di propagazione della luce, il tempo τ della vibrazione di un' atomo sarà espresso da

luce percorre in un secondo di tempo 309,500,000 metri, i tempi delle rispettive vibrazioni, espressi in parti di secondo, saranno

$$\frac{0,000000406}{309,500,000} \; ; \; \frac{0,000000645}{309,500,000}$$

ed i valori inversi di queste frazioni che sono

$$762,000,000,000,000 \quad ; \quad 480,000,000,000,000$$

esprimeranno il numero delle vibrazioni che fa la molecola luminosa, e ciascun atomo d' etere di un raggio di luce in un secondo; ed altrettanti impulsi riceverà il nervo ottico nello stesso tempo.

(1) $\tau = \frac{x}{v}$.

6. Onde fissar bene le idee e formarsi un concetto chiaro delle vibrazioni degli atomi e della contemporanea propagazione delle ondulazioni, ed accostumarsi a distinguere fra loro queste due diverse specie di movimento giova gettare un'occhiata sulla figura 30. In essa si trova rappresentata l'immagine di un raggio luminoso nello stato di vibrazione. Il movimento di propagazione si fa secondo il raggio *A B*, ed il movimento vibratorio degli atomi consiste, come lo proveremo con alcuni esperimenti in una lezione seguente, nello spostarsi e ritornare degli stessi atomi sulla linea di direzione del raggio. Le ordinate *b p*, *c q*, *d r* dinotano gli spazii di cui gli atomi corrispondenti si trovano scostati dalla direzione del raggio in uno stesso istante. La lunghezza *a e* compresa fra i due estremi di una sinuosità, e nei quali la curva tocca l'asse *A B*, rappresenta la lunghezza dell'onda. Dividendo questa sinuosità in due parti, per mezzo dell'ordinata massima *c q*, le estremità delle coordinate crescenti della parte anteriore rappresentano le situazioni degli atomi quando vengono scostati dal loro sito naturale, cioè nello stato della semi-ondulazione impulsiva, e la estremità delle coordinate decrescenti della parte posteriore le situazioni degli atomi quando tornano al loro sito naturale, nella semi-ondulazione appulsiva. Come il movimento si propaga uniformemente da un'atomo all'altro, così un'atomo seguente nel prolungamento del raggio dovrà trovarsi nell'istante successivo nella stessa situazione in cui si trovava l'atomo precedente nell'istante anteriore. Se quindi immaginiamo che la detta sinuosità vada scorrendo colla velocità di propagazione lungo il raggio *A B*, i punti che essa intersecherà successivamente sulla perpendicolare *b p*, potranno rappresentare anche le situazioni successive dell'atomo in *b*, che nel periodo della sua vibrazione rimane costantemente sulla stessa perpendicolare. I punti d'intersezione, sempre più discosti dall'asse, fatti durante il passaggio della parte anteriore della sinuosità segneranno i luoghi dell'atomo mentre viene scostato dalla linea di direzione del raggio; ed i punti d'intersezione, che s'avvicinano sempre più all'asse, fatti durante il passaggio della parte posteriore, i luoghi successivi dell'atomo quando le forze elastiche lo ricondurrano sul raggio. Non deve fare specie che i fenomeni abbiano fatto scoprire, come si è precedentemente avvertito, che gli atomi vibrino in una direzione, e trasmettano il loro movimento in una direzione perpendicolare a quella in cui

vibrano. Oltre all' analisi matematica che mostra la possibilità di tal sorta di propagazione, Fresnel col semplice raziocinio ha esposto in una Memoria (1), di cui daremo un estratto in una delle Note seguenti, il modo con cui tali movimenti possono concepirsi generati. In quest' articolo abbiamo voluto soltanto presentare alla mente nella descritta figura un' immagine dei due movimenti contemporanei, onde avvertire bene di non confondere il movimento proprio di vibrazione degli atomi, colla trasmissione dello stesso movimento da atomo ad atomo, da cui trae origine la propagazione delle onde lungo il raggio luminoso.

7. Nelle teorie ottiche giova spesso di aver l' espressione della velocità con cui vibrano gli atomi su di un raggio di luce che si propaga in linea retta. Si è trovato che i fenomeni sono rappresentati con sufficiente accordo colla realtà supponendo che le velocità degli atomi vibranti variino colla stessa legge delle velocità delle oscillazioni dei pendoli (2). Rappresenti $A\,B$ (Fig. 31) l' escursione che fa un atomo durante l' impulso o l' appulso di una vibrazione, o come si dice l' *amplitudine d' una vibrazione.* Descritto sopra $A\,B$ come diametro un cerchio, contasi il tempo proporzionalmente al crescere degli archi di questo cerchio, partendo dal punto A. La legge adottata per la velocità degli atomi suppone che l' atomo vibri in modo che, quando il tempo è espresso dall' arco qualunque $A\,C$, l' atomo si trovi in P nel piede della perpendicolare abbassata dall' estremità C sul diametro $A\,B$. La velocità dell' atomo in quest' ipotesi sarà la componente, secondo $A\,B$, della velocità di un corpo che descrivesse con movimento uniforme il cerchio $A\,C\,B$ nel tempo di una vibrazione, cioè colla velocità $\frac{\pi \,.\, A\,B}{\tau}$; π dinotando al solito il rapporto della circonferenza al diametro, e τ il tempo della vibrazione. Ora è facile il vedere che, rappresentando con $C\,L$ questa velocità, diretta secondo la tangente, sarà, per la similitudine dei due triangoli $C\,L\,H$, $C\,O\,P$, la componente cercata $C\,H$ proporzionale a $C\,P$, o sia si avrà

$$C\,H = \frac{2\,\pi}{\tau} .\, C\,P = v.$$

Se si conta il tempo t dal momento in cui l' atomo comincia la vibrazione, sarà $A\,O\,C = 2\,\pi\,\frac{t}{\tau}$, e poichè nel cerchio si ha

(1) Fresnel *Mémoire sur la double réfraction* Academie des Sciences 1827.
(2) Vedasi la Nota I alla Lez. IV, art. 3.

$CP = OA \sin AOC$; posto

$$i = \frac{2\pi}{\tau} OA$$

sarà la velocità dell' atomo ad ogni istante data da

$$(2) \qquad v = i \sin 2\pi \frac{t}{\tau}.$$

Il coefficiente costante i, che corrisponde alla massima velocità che l' atomo acquista, e che assegna in generale la grandezza delle velocità con cui si fanno le vibrazioni, determina la vivezza od intensità della luce: come la quantità d' azione che può esercitare l' atomo con un gran numero di vibrazioni, o l' effetto dinamico prodotto col perdere la sua velocità nel nervo ottico della retina, è proporzionale al quadrato della velocità, si prende l' intensità della luce proporzionale al quadrato di i.

8. Conseguita l' espressione delle velocità che agitano un atomo in un dato punto, che prenderemo come per origine dal raggio luminoso, si può assegnare quella delle velocità di un atomo posto in qualunque altro punto dello stesso raggio. Infatti siccome la propagazione della luce si fa con moto uniforme, la velocità con cui vibra il secondo atomo, posto alla distanza x, è quella stessa che animava il primo atomo in un tempo anteriore di tanto quanto la luce impiega a percorrere la detta distanza. Se dunque si osserva che, V essendo la velocità di propagazione della luce, il quoziente $\frac{x}{V}$ esprime questo tempo, mettendo $t - \frac{x}{V}$ in luogo di t nella formola precedente (2), la velocità di vibrazione del secondo atomo dovrà essere espressa da

$$v = i \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{V\tau}\right).$$

Ma, per la formola segnata (1), $V\tau$ è la lunghezza λ di un' ondulazione, dunque, eliminando V, si avrà la formola

$$(3) \qquad v = i \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

per rappresentare dopo un tempo t la velocità di vibrazione dell' atomo posto alla distanza x dall' origine, cioè contata da un punto, sul raggio luminoso, nel quale la vibrazione stia per cominciare nell' istante in cui si ha $t = 0$, o sia nell' istante in cui si comincia a valutare il tempo.

Facendo variare successivamente il tempo t, e conservando la distanza x costante, la formola precedente dà a conoscere le velocità per cui passa nei diversi istanti uno stesso atomo posto alla distanza x, e se si tiene invece t costante e si fa variare la x, si hanno le velocità che possedono nello stesso istante i diversi atomi situati sul raggio luminoso. È facile di riconoscere che costruendo la formola (3), o sia applicando ad ogni distanza x una ordinata eguale al valore di v data da quella formola, la curva che unisce le estremità di tutte queste ordinate, le quali rappresentano le velocità di vibrazione dei diversi atomi lungo il raggio luminoso, ha la forma disegnata nella figura 32, che è conosciuta in geometria col nome di *curva dei seni*, che Leibnitz le ha dato. Le coordinate dalla parte superiore all' asse possono rappresentare le velocità positive, delle quali sono dotati gli atomi che vanno scostandosi dall' asse, e quelle dalla parte opposta possono rappresentare le velocità negative, colle quali gli atomi retrocedono sull' asse.

Siccome la scala delle velocità, per cui passa un'atomo durante la sua vibrazione, segue la stessa legge della scala delle velocità, da cui sono animati nello stesso istante gli atomi consecutivi di un' onda, così le coordinate di due sinuosità contrarie di una parte della stessa curva (Fig. 32) potranno rappresentare anche le velocità di un'atomo nel periodo della sua vibrazione. Questo è ciò che pure risulta dalla formola (3), la quale ci mostra che, partendo dall'istante in cui $\frac{t}{\tau} = \frac{x}{\lambda}$, cioè dall' istante in cui l' atomo posto alla distanza x comincia ad essere agitato, e dando a t dei valori successivamente crescenti sino ad uguagliare $t + \tau$, o vero, partendo dallo stesso istante e dando ad x dei valori successivamente decrescenti sino ad avere $x - \lambda$, le due serie dei valori delle velocità che si ottengono, la prima delle quali corrisponde alle successive velocità di uno stesso atomo, e la seconda alle velocità contemporanee dei diversi atomi di un' onda, sono uguali e rappresentate dalla stessa curva.

Se si confrontano le due curve delle figure 30, e 32; la prima delle quali rappresenta la situazione dei diversi atomi del raggio, e la seconda la velocità corrispondente, si vede che, mentre questa taglia l' asse un certo numero di volte, la prima non fa che toccarlo un numero di volte eguale alla metà. In ogni onda, la velocità, rappresentata dalle coordinate della figura 32, è nulla al principio, nel mezzo ed alla fine dell' onda, cioè è nulla, quando lo

scostamento dell' atomo dall' asse rappresentato dall'ordinata della figura 30, sta per cominciare, è giunto al suo massimo, ed è ritornato nullo. Questa relazione fra le velocità e gli spostamenti è richiesta tutte le volte che i tremiti non si propagano che in una sola direzione per avanti, e non per indietro, nel qual caso è necessario che gli atomi, restituendosi alla loro situazione d' equilibrio stabile, vi giungano con una velocità evanescente.

Se si riferissero gli spostamenti degli atomi, non alla retta che passa per le loro situazioni d' equilibrio stabile, ma a quella che dividesse per metà tutte le amplitudini delle loro vibrazioni; gli scostamenti e le velocità sarebbero, nella figura 33, rappresentati, i primi dalle ordinate della curva a, a', a'', a''' ec., e le seconde dalle ordinate della curva v, v', v'', v''' ec., e le ordinate delle due curve si potrebbero calcolare rispettivamente colle equazioni

$$a \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right), \quad \text{ed} \quad i \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

9. I tremiti degli atomi su di una sola superficie inviluppante, cioè sopra una superficie dell' onda, non sono abbastanza efficaci per produrre da se stessi la luce: la luce non esiste se non quando queste superficie scosse si seguono in modo da formare un' onda. Ma questo pure non basta; è necessario, affinchè l' effetto della visione abbia luogo, che più onde si seguitino le une alle altre, in modo da formare un sistema o successione di onde, che penetrino nell' occhio ed agiscano sulla retina a periodi equidistanti, in un modo analogo a quello in cui le onde aeree, agendo sul timpano e le altre parti dell'orecchio, producono il suono. Le lunghezze differenti delle onde sonore producono la diversità dei tuoni, la differente lunghezza delle onde luminose dà origine, come vedremo in seguito, alla diversa refrangibilità dei raggi ed alla conseguente apparizione dei colori che si scorgono nello spettro solare corrispondenti ad ogni grado di rifrangibilità.

10. Si dice che due onde luminose eguali e parallele attraversano un luogo dello spazio in *concordanza*, quando vi giungono avendo la stessa fase, le parti della semiondulazione impulsiva ed appulsiva dell' una corrispondendosi esattamente con quelle dell' altra; per lo contrario si dice che due onde vi passano in *discordanza*, se vi giungono con fase opposta in modo che una preceda l' altra della metà della loro lunghezza, e la parte appulsiva dell' una corrisponda alla parte impulsiva dell' altra.

Immaginiamo ora che per uno stesso punto dello spazio ven-

gano a passare due sistemi d'onde eguali, e prossimamente parallele. Se le onde dell'uno sono concordanti con quelle dell'altro, pel principio di D. Bernoulli generalizzato, cioè pel principio della coesistenza dei piccoli movimenti, le vibrazioni degli atomi eterei situati in quel punto si sovrapporranno, le loro escursioni e velocità massime diverranno doppie, e l'intensità della luce sarà quadruplicata (art. 7). Ma se le onde dell'uno sono discordanti con quelle dell'altro, le velocità, che un sistema apporterà agli atomi del punto comune, saranno opposte a quelle dell'altro, essi si distruggeranno reciprocamente, gli atomi eterei in quel punto rimarranno continuamente immobili, ed ogni luce sarà annichilata. Si avrà così il fenomeno, che vedremo in seguito confermato dall'esperienza, che luce aggiunta a luce produce oscurità. Il principio, che abbiamo spiegato, dell'influenza reciproca di due sistemi d'onde o raggi di luce discordanti è stato messo in campo la prima volta dal D. Young., e fu da esso chiamato il *principio delle interferenze*. Questo principio è, come vedremo in seguito di una applicazione continua nel sistema delle ondulazioni, e deve risguardarsi come la scoperta fondamentale della teoria di questo sistema.

11. Allorchè i due sistemi di onde eguali e perallele che vengono a passare per lo stesso luogo dello spazio non sono interamente concordanti o discordanti, la duplicazione o distruzione delle vibrazioni degli atomi non ha più luogo. In questi casi la grandezza della vibrazione risultante ha un valor medio, che dipende dalla differenza delle fasi dei due sistemi. Per formarci un'idea del modo con cui devono essere composte le vibrazioni, nel caso presente più complicato, conviene ricorrere alla legge su esposta, con cui variano le velocità nelle vibrazioni degli atomi. Assumiamo perciò l'espressione adottata della velocità di un atomo espressa dalla formola (3)

$$v = i \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right);$$

ed adattiamola a rappresentare le vibrazioni di due sistemi d'onde d'egual durata, ma discordanti di fasi.

Supponiamo che, quando $t = 0$, il primo sistema d'onde non sia ancor giunto ad agitare il punto corrispondente all'ascissa x, e che gli manchi a percorrere una porzione f della lunghezza totale di un'onda; porzione, che equivalendo a quella che già ha attraversato l'atomo posto all'origine quando il sistema arriva ad agitare l'etere in x, si usa pure d'indicare col nome di *fase*. In questo caso sarà $x = f$; e sostituendo questo valore di x nella

formola precedente, si avrà

$$v = i \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{f}{\lambda}\right).$$

Rispetto al secondo sistema d'onde, indichiamo le quantità analoghe a quelle del primo sistema, colle stesse lettere a cui si sia sovrapposto un'apice, così che f' dinoti la porzione d'onda che manca a percorrere a questo sistema per giungere al punto x, quando $t = 0$: si avrà l'espressione delle velocità dell'atomo, corrispondente ad x, che vi arreca il secondo sistema d'onde, data da

$$v' = i' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{f'}{\lambda}\right).$$

La velocità totale u dell'atomo, essendo pel principio della sovrapposizione dei piccoli movimenti, data dalla somma delle due velocità, si avrà

$$u = i \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{f}{\lambda}\right) + i' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{f'}{\lambda}\right).$$

Se si sviluppano i seni, e si pone

$$(4)\quad \begin{aligned} i \cos 2\pi \frac{f}{\lambda} + i' \cos 2\pi \frac{f'}{\lambda} &= I \cos 2\pi \frac{\varphi}{\lambda}; \\ i \sin 2\pi \frac{f}{\lambda} + i' \sin 2\pi \frac{f'}{\lambda} &= I \sin 2\pi \frac{\varphi}{\lambda}; \end{aligned}$$

è facile il vedere che, al valore precedente di u, si può dare la forma

$$(5)\qquad u = I \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\varphi}{\lambda}\right).$$

Così che l'espressione della velocità composta, o risultante dai due sistemi d'onde, sarà della stessa forma delle velocità semplici, e sarà tale come se l'atomo fosse agitato da un solo sistema a cui corrispondesse la velocità massima I e la fase φ.

Ora sommando i quadrati delle due formole (4) si ricava

$$(6)\qquad I^2 = i^2 + i'^2 + 2\, i\, i' \cos 2\pi \frac{f - f'}{\lambda}$$

e dividendo le stesse formole una per l'altra si ottiene

$$(7)\qquad \tan 2\pi \frac{\varphi}{\lambda} = \frac{i \sin 2\pi \frac{f}{\lambda} + i' \sin 2\pi \frac{f'}{\lambda}}{i \cos 2\pi \frac{f}{\lambda} + i' \cos 2\pi \frac{f'}{\lambda}}$$

La prima di queste formole darà a conoscere la massima velocità

della vibrazione risultante, e la seconda la fase φ che gli corrisponde, e le due formole unite risolveranno il problema.

Se si trasporta l'origine del tempo all'istante, in cui il primo sistema d'onde giunge ad agitare l'atomo, il che è sempre lecito, poichè possiamo cominciare a contare il tempo da quell'istante che più ci piace, sarà $f = 0$, e le due formole precedenti diverranno più semplici e daranno

$$(6)' \qquad I^2 = i^2 + i'^2 + 2\,i\,i' \cos 2\pi \frac{f'}{\lambda}$$

$$(7)' \qquad \tan 2\pi \frac{\varphi}{\lambda} = \frac{i' \sin 2\pi \frac{f'}{\lambda}}{i + i' \cos 2\pi \frac{f'}{\lambda}} .$$

Quando i sistemi sono interamente discordanti, f' deve eguagliare una mezza ondulazione, e, posto $f = \frac{1}{2}$, si ha

$$\cos 2\pi \frac{f'}{\lambda} = -1 \quad ; \quad \sin 2\pi \frac{f'}{\lambda} = 0 ;$$

per cui si ottiene

$$I = i - i' \quad ; \quad \frac{\varphi}{\lambda} = 0$$

La velocità della vibrazione risultante è dunque eguale alla differenza delle velocità delle vibrazioni dei due sistemi, ed è concordante con quella che ha una velocità maggiore. In questo caso se le velocità i ed i' sono eguali, la velocità risultante riesce nulla, l'atomo rimane immobile, ed ogni effetto di luce sparisce. Ciò che è conforme a quanto abbiamo conchiuso sopra, nell'indicare il principio delle interferenze.

Se i due sistemi sono concordanti $f' = 0$, e risulta

$$\cos 2\pi \frac{f'}{\lambda} = 1 \quad ; \quad \sin 2\pi \frac{f'}{\lambda} = 0$$

per cui le formole (6)', (7)' danno

$$I = i + i' \quad ; \quad \frac{\varphi}{\lambda} = 0$$

cioè la velocità della vibrazione risultante è tale che eguaglia la somma delle due vibrazioni parziali, ed è concordante con esse.

12. In generale le formole (6)' e (7)' ci mostrano, che I è il terzo lato di un triangolo costrutto su due lati che siano proporzionali ad i, ed i', e che comprendano fra loro l'angolo $2\pi \frac{f'}{\lambda}$: o sia è la diagonale del parallelogrammo costrutto sui lati i ed i' com-

prendenti l'angolo $2\pi \frac{f}{\lambda}$. Paragonando questo risultamento con quello conosciuto della composizione delle velocità, nei movimenti uniformi, o quella del parallelogrammo delle forze, (Lez. II. art. 3 e 4, e Lez. VII. Nota II) se ne scopre una completa analogia, poichè esse si fanno colle stesse regole, le velocità massime delle vibrazioni e le fasi tenendo rispettivamente il luogo delle velocità e delle direzioni dei movimenti rettilinei uniformi.

Viceversa dobbiamo, a seconda di quanto abbiamo esposto, conchiudere che una vibrazione data, appartenente ad un sistema d'onde è sempre decomponibile in due vibrazioni appartenenti a due sistemi d'onde diversi, con che le velocità massime delle vibrazioni, e la differenza di fase di questi due sistemi siano rappresentati dai lati e dall'angolo compreso di un parallelogrammo di cui la diagonale ed un angolo rappresentino la velocità massima e la differenza rispettiva di fase della vibrazione data, perchè componendo quelle due vibrazioni ne risulterà la vibrazione proposta. Vedasi la Nota I.

LEZIONE XXVII.

Applicazione del sistema delle ondulazioni alla deduzione delle leggi della propagazione della luce diretta, riflessa, e rifratta ordinariamente.

1. Esposte varie delle principali proprietà dei movimenti dell' etere che conviene di considerare nel sistema delle ondulazioni, possiamo passare a vedere come dalla loro applicazione si deduce la spiegazione dei fenomeni che abbiamo fatto conoscere nelle precedenti Lezioni.

La propagazione successiva della luce, cioè il trasmettersi della medesima da un luogo all' altro col tempo, non presenta difficoltà: essa è una conseguenza necessaria della costituzione dei mezzi elastici di densità uniforme, ne' quali, come dimostrasi nella dinamica, un movimento o tremito si trasmette da una parte alla contigua con una certa velocità costante, che è tanto più grande quanto il mezzo è più elastico e la sua massa è minore, cioè è meno denso. Di qui la grande velocità di trasmissione della luce, nell' ipotesi che l' etere sia grandemente elastico ed estremamente raro.

Non così facile a riconoscersi è la propagazione in linea retta di un raggio, o pennello di luce, proveniente da una fonte lontana, che passi per un piccolo foro. I tremiti eccitati negli atomi situati nel foro, pare che dovrebbero, nel propagarsi, trasmettersi successivamente a tutta la massa d'etere situata al di là, e quindi che l'illuminazione dovrebbe diffondersi tutt' all' intorno, come appunto un suono, prodotto al di fuori d' una piccola apertura d' una stanza, si udirebbe in tutto l' interno della medesima. Da principio la difficoltà di spiegare la propagazione rettilinea della luce parve tanto grande, che Newton ed i suoi seguaci, credendo che l' allineamento del raggio fosse rigorosamente osservato, sono stati indotti a rigettare il sistema delle ondulazioni come incapace di risolverla da se solo (1). La luce che penetra da un foro non si propaga però esattamente in linea retta, ed in una prossima Lezione faremo conoscere i delicati fenomeni, da cui si deduce che si estingue gradatamente sui confini, tracciati da certe linee curve: la parte però più sensibile di questa

(1) Newtonis. Phil. nat. Princ. Math. Lib. II. Sect. VIII. Prop. 4; Scholion.

luce segue un cammino rettilineo, e di ciò la teoria delle ondulazioni dà una ragione completa.

Per tale oggetto immaginiamo che una luce prodotta da una fonte assai lontana si propaghi per onde luminose, nel modo che abbiamo descritto all'articolo 4 della Lezione precedente, e consideriamo la porzione della superficie dell'onda, o dell'inviluppante generale che attraversa il foro *A B* (Fig. 34), per cui un pennello di luce penetra in una camera oscura. L'estensione del foro essendo piccola in confronto della distanza della fonte luminosa potremo considerare come piana quella porzione della superficie dell'onda che occupa il foro. Secondo ciò che abbiamo esposto nella Lezione precedente, tutti gli atomi *H*, *H*, *H* in questa porzione di superficie dell'onda, staranno nella stessa fase di vibrazione, e coi loro tremiti daranno origine ad un sistema di superficie fluenti, dalla reciproca intersezione delle quali, o dalla loro inviluppante comune, nascerà una nuova superficie dell'onda *K K K* che sarà parimenti piana. Presa quindi al di là del foro una sezione qualunque *S S* perpendicolare alla direzione del raggio, e dell'ampiezza dell'inviluppante *K K K*, questa sola sezione, secondo i principii esposti per la generazione delle onde luminose, sarà quella, in cui la luce potrà divenire sensibile. Questo è ciò che possiamo mettere ancor più in chiaro, esaminando il complesso degli effetti di tutte le superficie fluenti parziali generate dagli atomi in *H*, *H*, *H*, le quali possono venire in un dato istante ad incontrarsi e ad intersecarsi in un punto qualunque su questa sezione, o fuori di essa.

Queste superficie fluenti possiamo distinguerle in due specie. Le une che chiameremo *superficie tangenti* saranno quelle che, partendo nello stesso istante da tutti gli atomi vibranti nel foro, giungono fluendo, nel tempo più breve, a toccare la superficie dell'onda, e formano colla loro intersezione una inviluppante piana ed eguale alla ampiezza del foro. Ciascuna di queste superficie tangenti tocca la superficie dell'onda nel punto *K*, che sta perpendicolarmente dirimpetto all'atomo del foro, da cui è stata generata, o sia in un punto equidistante dal rispettivo atomo. I tremiti, che arrecheranno ai punti *K* della superficie dell'onda le superficie tangenti che consideriamo, corrisponderanno quindi tutti alla stessa fase dell'onda, tutti concorreranno a rinforzare il movimento, ed a rendere la luce più viva.

Insieme a ciascuna di queste superficie tangenti, per esempio a quella corrispondente all'atomo in *H* (Fig. 34 bis), potranno arrivare nello stesso istante al punto rispettivo *K*, sulla superficie

dell'onda, anche altre superficie fluenti generate dagli atomi in m, p, r laterali ad H, le quali chiameremo *superficie secanti*, perchè tagliano il piano dell'onda: ma per arrivarvi contemporaneamente, converrà che siano state generate in un tempo precedente a quello, in cui si sviluppò la superficie tangente, avendo dovuto percorrere un cammino più lungo. Ora, appunto per essere state generate prima, i tremiti che apporteranno queste superficie secanti non saranno più corrispondenti in fase coi tremiti che arrecherà la superficie tangente. Quelle, i cui centri sono più prossimi al punto H, differiranno poco di fase, e concorreranno in gran parte ad aumentare la luce nel punto K, ma a mano a mano che i loro centri saranno più discosti da H, le loro fasi anderanno differendo sempre più, e quando il cammino mK giungerà a differire, da quello HK corrispondente alla superficie tangente, della lunghezza mn di una mezza ondulazione, la loro fase sarà totalmente discordante, ed interferiranno interamente. Al di là di m, quando la distanza Hp sia tale che la differenza di cammino pq sia cresciuta della lunghezza di un' altra mezza ondulazione, le superficie secanti rispettive torneranno ad arrecare dei tremiti, che concorderanno in fase con quelli che vi arreca la superficie tangente; poi ancor più lontano, quelle i cui cammini differiranno della lunghezza di tre mezze ondulazioni, come in rs, discorderanno un'altra volta, e così successivamente. Siccome le lunghezze delle onde luminose sono estremamente piccole ed impercettibili ai sensi, un lieve allontanamento dal punto H basterà, affinchè i tremiti, che arrecano le superficie secanti generate dagli atomi situati in questo breve intervallo, si succedano un grandissimo numero di volte con fasi alternative di concordanza e discordanza, alternative che la grandezza che abbiamo dovuto dare alle parti della figura per renderle visibili, non ci ha permesso che di delineare in piccol numero.

Le superficie secanti, nel fluire, apporteranno quindi agli atomi posti in un elemento qualunque K dei tremiti alternativamente favorevoli e contrarii all' effetto totale. Quelle, i cui centri sono contigui od assai vicini al punto H, lascieranno sussistere una differenza in favore del tremito che vi arreca la superficie tangente, e dal loro concorso ne nascerà un'effetto atto a produrre l'illuminazione. Ma tosto che si considera l'effetto prodotto sugli atomi dello stesso punto K, dai tremiti recati da quelle superficie fluenti i cui centri sono situati su di una porzione del foro sensibilmente discosta da H, si vede che quei tremiti giungendo parte

nello stato di semi-ondulazione impulsiva, e parte nello stato di semi-ondulazione appulsiva, e le alternative succedendosi, per una ben piccola porzione del foro, un gran numero di volte, i loro effetti parziali saranno tali, che dovranno distruggersi reciprocamente quasi per intero, o non lascieranno sussistere che un residuo insensibile. Di qui ne segue che se si prende ad esaminare l'illuminazione in un punto P (Fig. 35), posto fuori ad una distanza appena sensibile dalla porzione $S\,S$ della superficie inviluppante, siccome a questo punto non possono, fluendo, che arrivare obliquamente delle superficie secanti, che apportano dei tremiti fra loro discordanti, il movimento risultante degli atomi nello stesso luogo, agitati da un numero sensibilmente pari di tremiti opposti, sarà costantemente insensibile, ed ogni effetto luminoso verrà sopito.

L'effetto d'illuminazione, prodotto da un fascetto di luce, proveniente da una fonte lontana, che, penetrando in una camera oscura per un foro, vada propagandosi nell'interno, si scorgerà dunque soltanto sensibile in una sezione apparentemente sempre della stessa ampiezza del foro, a qualunque distanza da esso sia presa, e quindi il fascetto di luce sembrerà conservare una forma cilindrica, o sia parrà propagarsi in linea retta. Ecco come il principio delle interferenze, combinato coll'estrema cortezza delle onde luminose, mette in chiaro la distruzione d'ogni effetto sensibile di luce ad una distanza apprezzabile dai confini del raggio; distruzione che non si manifesta che in piccol grado nella propagazione del suono, le cui onde sono di una lunghezza incomparabilmente maggiore.

3. In generale nel trattare della propagazione di un pennello di luce, in questi primi fenomeni dell'Ottica, prescinderemo dalla considerazione di quelle superficie fluenti che arrivano sensibilmente secanti il piano delle superficie dell'onda, i cui effetti luminosi possono sempre, coi ragionamenti su esposti, dimostrarsi insensibili. Esistono invero dei casi particolari, come quando i fori, od i confini da prendersi in considerazione, siano più d'uno, o quando la fonte luminosa sia molto sottile, in cui conviene tener conto anche degli effetti delle superficie secanti: ma questi casi gli studieremo di poi. Ora esamineremo soltanto gli effetti uniformi e sensibili che sono prodotti nello spazio compreso da una porzione di superficie inviluppante formata da un gran numero di superficie tangenti, ricordandoci che l'intensità degli effetti luminosi apportati da ciascuna superficie tangente è grandemente accresciuta e resa sensibile dal concorso degli effetti prodotti dalle

superficie secanti, che hanno fluito da atomi contigui a quello che ha generato la superficie tangente che si considera.

4. Posti questi principii, passiamo ad esaminare le leggi della riflessione. Supponiamo che un fascetto di luce, la cui fonte sia come posta ad una distanza infinita, venga separato dal resto e che si propaghi in linea retta attraverso un certo spazio. La superficie dell' onda o dell' inviluppante, che in ogni sezione forma la parte visibile del fascetto di luce, sarà per quello che abbiamo dimostrato sopra, piana e perpendicolare alla retta secondo la quale il fascetto di luce si propaga. Sia *A B* (Fig. 36) questa porzione della superficie dell' onda ed *i H* perpendicolare ad *A B* la direzione secondo la quale procede, e sia *A P* una superficie piana specolare, che il fascetto di luce vada ad incontrare. Di mano in mano che ciascuno dei punti *A*, *i*, *i*, *i* e *P* del piano riflettente viene attinto dalla superficie dell'onda che si avanza, si forma in questo punto un centro di vibrazione da cui dirama una superficie sferica fluente *A Q*, *i K*, ec. che si propaga per addietro colla stessa velocità con cui si propagherebbe la superficie fluente corrispondente per avanti, se la superficie riflettente non esistesse. Così quando il punto *B* della superficie dell' onda incidente sarà arrivato sul piano riflettente in *P*, la superficie fluente generata in *A* avrà già acquistato un raggio *A Q* eguale a *B P*. Similmente i punti *H* della superficie dell' onda incidente, arrivati in *i* avranno generato delle superficie fluenti, i cui raggi *i K* saranno eguali ad *i h*, e la comune intersezione di tutte queste superficie fluenti sarà sul piano *P Q* tangente a ciascuna di esse, e situato al disopra di *A B*, in un modo simile a quello con cui il piano *P R*, se lo specchio non esistesse, sarebbe situato al disotto. È soltanto su questa inviluppante *P Q* che i tremiti saranno, secondo ciò che abbiamo premesso, rinforzati ed efficaci a produrre la sensazione della luce, e come questa inviluppante procede nella direzione *A Q* perpendicolare al piano *P Q*, sarà in questa direzione che il proseguimento del cammino di luce sarà visibile, o sia che il fascetto luminoso parrà riflesso.

Ora nei due triangoli rettangoli *A B P*, *A Q P*, essendo *A P* comune, ed *A Q* eguale a *P B*, questi due triangoli saranno eguali e l'angolo *B P A* sarà eguale all' angolo *P A Q*: il primo di questi angoli corrispondendo al complemento dell' angolo d' incidenza, ed il secondo al complemento dell' angolo di riflessione del fascetto, avremo la dimostrazione della legge, che l'esperienza ci ha mostrato, che nella riflessione regolare della luce l' angolo d' incidenza e l' angolo di riflessione sono sempre eguali.

5. Non sia più *A P* una superficie piana riflettente, ma si bene una superficie piana che limita un mezzo rifrangente omogeneo, entro il quale il fascetto di luce vada a penetrare. Si considera, nel sistema delle ondulazioni, un mezzo omogeneo come rifrangente quando per essere in esso minore il rapporto dell'elasticità alla sua densità, la velocità, con cui i tremiti si propagano sfericamente, sia minore. Rappresenti *A Q* (fig. 37), lo spazio che la superficie fluente propagante il tremito percorre nel secondo mezzo, mentre nel primo percorre lo spazio *B P*, eguale ad *A R*. Nell'istante che il punto *B* della superficie dell'onda incidente *A B* attingerà il punto *P*, la superficie fluente generata nel punto *A* avrà acquistato il raggio *A Q*, e le superficie fluenti generate nei punti *i*, avranno acquistati i raggi *i K*, che tutti staranno rispettivamente ad *i h* come *A Q* sta ad *A R*. La retta *P Q* perpendicolare ad *A Q* rappresenterà il piano tangente a tutte queste superficie, che sarà il luogo ove esse s'intersecano successivamente e formano la porzione d'inviluppante, o sia la superficie dell'onda, dove la luce è sensibile. Quest' inviluppante rimanendo in seguito nel suo corso sempre perpendicolare ad *A Q*, sarà *A Q* la direzione secondo la quale il fascetto di luce si vedrà propagarsi.

Ora se prendendo *P A* per raggio, e *P* per centro, immaginiamo descritti due archi *A C*; *A c* che terminano sulle rette *P Q*, *P R* prolungate, è evidente che *A Q* ed *A R* rappresenteranno i seni degli angoli *A P Q*, *A P R* rispettivamente eguali all'angolo di rifrazione ed all'angolo d'incidenza. Ma *A Q* ed *A R* stanno come la velocità di propagazione della luce nel secondo mezzo a quella del primo mezzo, dunque indicando con *v* ed *u* queste velocità si avrà

$$\text{sin } rif : \text{sin } inc :: A Q : A R :: v : u.$$

Sia il rapporto costante *v* : *u* della velocità *v* di propagazione nel mezzo rifrangente alla velocità *u* di propagazione nel mezzo incidente, espresso da 1 : *n*; allora *n* dinoterà l'indice di rifrazione, e sostituendo questo rapporto nella proporzione precedente si avrà

$$\text{sin } rif : \text{sin } inc :: 1 : n$$

la quale ci dà la legge che l'esperienza ci ha mostrato, cioè che il seno di rifrazione è al seno d'incidenza nel rapporto costante dell'indice di rifrazione.

6. Se il fascetto di luce, in luogo di passare da un mezzo meno rifrangente in un mezzo più rifrangente, passasse invece da uno più rifrangente in uno che lo fosse meno, il raggio *A Q* diverreb-

be, come nella figura 38, maggiore di *B P* od *A R*, e *P Q* verrebbe ad essere più corta di *A B*. Crescendo successivamente l'obbliquità *I A* del fascetto di luce incidente, il raggio *A Q* finirebbe a divenire eguale ad *A P*, e poi maggiore. In questo caso le superficie fluenti *A Q*, *i K* ec. verrebbero ad essere comprese le une entro le altre (Fig. 39), e non si taglierebbero più successivamente per formare un'inviluppante, per cui ogni apparizione di luce deve cessare nel secondo mezzo, come l'esperienza, riferita all'art. 12 della Lezione XXIII, dimostra. Vedremo in seguito la modificazione che riceve la luce che viene più abbondantemente riflessa indietro nel primo mezzo.

7. È evidente che il piano della figura, in cui abbiamo fatto le costruzioni per le dimostrazioni delle due proposizioni precedenti, deve essere quello della direzione dell'asse del fascetto di luce e della perpendicolare al piano riflettente o rifrangente, e che perciò l'inviluppante rimane prima o dopo l'incontro delle dette superficie nello stesso piano, che è quello in cui si scorgono i raggi, in conformità colla legge sperimentale che regola, come abbiamo visto, tanto la riflessione che la rifrazione.

8. Parimente per semplicità del discorso abbiamo ragionato come se il raggio di luce fosse tutto in un piano, e non avesse grossezza, ciò che non è in natura: ma dividendo col pensiero questo fascetto di luce in tante sezioni con dei piani condotti parallelamente al piano di riflessione, o di rifrazione, ci convinceremo facilmente, che, ciò che si verifica per la luce posta in uno di questi piani, deve verificarsi in qualunque degli altri piani, osservando che, secondo le considerazioni esposte, la propagazione della luce non verrebbe a soffrire alcuna alterazione o modificazione perpendicolarmente al piano di riflessione o di rifrazione, e che quindi nessuna parte del raggio escirebbe dal suo piano.

9. La spiegazione della diversa refrangibilità dei raggi di luce, o della dispersione, dipende, nel sistema delle ondulazioni, dal dimostrare che la luce nel passare in un mezzo rifrangente non soffre tutta un'eguale diminuzione od aumento nella sua velocità di propagazione, ciò che fa sì, che l'indice di rifrazione non venendo ad avere lo stesso valore per le diverse specie di luce componenti il raggio, art. 5, esse devono prendere una direzione diversa nel rifrangersi, e quindi separarsi. Ma il dare questa dimostrazione esige dei calcoli alquanto complicati. La causa fisica del fenomeno non è però difficile a concepirsi se si considerano i corpi sotto il punto di vista più volte esposto, e che si presta tanto bene alla

spiegazione degli altri fenomeni. Secondo questo modo di vedere i corpi sono composti di molecole dette ponderabili, ciascuna delle quali si è formata intorno a se un'atmosfera d'etere d'una densità rapidamente decrescente, allo scostarsi insensibilmente dal centro; le molecole si tengono in equilibrio stabile in virtù di forze attrattive e repulsive, che si esercitano reciprocamente fra esse e le loro atmosfere. Fin a tanto che si considera la propagazione della luce in un mezzo composto di solo etere omogeneo, e che le vibrazioni di ciascun atomo d'etere vengono ad essere tutte eguali fra loro, si dimostra matematicamente che la propagazione deve farsi con eguale velocità per ogni specie di onde, siano esse più o meno lunghe. Ma se il mezzo non è omogeneo in tutte le sue parti, come quando è disseminato di molecole ponderabili circondate dalle loro atmosfere, talchè nell'estensione di un'onda s'incontrino più alternative di densità differenti dell'etere, allora non si può più supporre che ogni atomo d'etere, non che ogni molecola ponderabile, facciano delle vibrazioni eguali, e non ne risulta più che la velocità di propagazione sia eguale per onde d'ineguale lunghezza. Allora si dimostra invece che il ritardo, il quale nasce nella propagazione delle onde, è, per la rapida e successiva alternazione nella grandezza della sua densità, e per l'inerzia delle molecole ponderabili, maggiore per le ondulazioni di minor lunghezza, i cui periodi di movimenti diretti e retrogradi sono più brevi, che per le ondulazioni più lunghe (1). Ora vedremo nella prossima Lezione che i raggi i quali appartengono alle parti più refrangibili dello spettro sono appunto quelli che sono costituiti da ondulazioni più corte.

10. Qualche fisico ha impiegato il principio delle interferenze per rendere ragione dell'assorbimento della luce, e del poter ineguale dei mezzi nell'assorbire la luce di diversa specie. Assumendo che le parti delle onde luminose, che attraversano i luoghi occupati dalle molecole ponderabili, siano ritardate nella loro propagazione, si può immaginare una disposizione tale di molecole che le parti delle onde che percorrono un certo cammino, vengano più spesso o maggiormente ritardate, che quelle che percorrono il cammino contiguo laterale, e che questa diversità di ritardo ripetuta un dato numero di volte produca a certi intervalli una differenza di cammino nelle due parti contigue dell'onda giusto della lunghezza di

(1) Vedansi gli *Atti della III Riunione degli Scienziati Italiani* pag. 223, ed il Tom. 1. N. 4. del giornale Toscano pag. 337 dove è data la formola esprimente il ritardo citato.

una semi-ondulazione di una certa specie di luce, e che quindi nasca una interferenza o distruzione di luce di questa specie. Il celebre D.r Young dava una spiegazione fondata su principii analoghi anche per la dispersione della luce (1).

11. L'elettricità ed il calore non essendo, secondo il modo su riferito di considerare la costituzione dei corpi, che effetti di nuovi stati permanenti o passeggieri dell'equilibrio dell'etere libero o di quello di cui sono formate le atmosfere delle molecole ponderabili, si presente bene, che le onde che si propagano o penetrano nei corpi devono influire sull'equilibrio delle atmosfere molecolari e dell'etere in generale frapposto, e quindi possono dar origine ai fenomeni calorifici, elettrici, magnetici e chimici che l'esperienza ci ha fatto conoscere, ed il cui studio ci dà a sperare abbondante messe per l'avanzamento della meccanica molecolare, che è la chiave d'ingresso alla conoscenza di tutta la natura (2).

(1) Vedasi nelle Phil. Trans. of the R. Society of London per l'anno 1802. la Memoria intitolata *An account of some cases of the production of colours* ec.

(2) A questo proposito ricorderemo ancora al lettore la Memoria citata altrove del Cav. M. Melloni sull'*Identité des diverses radiations lumineuses, calorifiques et chimiques*, la quale è piena di viste filosofiche su tale argomento.

LEZIONE XXVIII.

Diffrazione della luce. Fenomeni d' interferenze.

1. Grimaldi ha dato il nome di *fenomeni di diffrazione* a certi fenomeni di luce ed ombra che si osservano, in alcune circostanze, lateralmente al cammino che percorre la luce che si propaga sensibilmente in linea retta.

Introducendo per esempio, in una camera oscura per un piccolo foro la luce solare, questo fisico notò che le ombre dei corpi, immersi nel cono luminoso introdotto, venendo ricevute ad una distanza di circa due metri, erano più dilatate, che non sarebbero state se la luce che aveva lambito i contorni del corpo, avesse continuato il suo cammino in linea retta: che il luogo, sui confini, nel quale l' ombra si era dilatata, era occupato da tre frange colorate, che andavano diminuendo di larghezza dalla prima più vicina alla più lontana dall' ombra; e che impiegando dei corpi assai sottili, anche l' interno dell' ombra si trovava striato di frange colorate.

Un altro esperimento, più mirabile ancora, istituì il Grimaldi facendo penetrare nella camera oscura la luce non di un solo foro, ma di due fori posti vicini fra loro. Ricevendo la luce dei due coni luminosi, ad una distanza abbastanza grande onde le due immagini circolari venissero a sovrapporsi in parte (Fig. 40), osservò che le parti sovrapposte erano più chiare nel mezzo, ma oscure nei loro contorni i quali si tingevano anche di alcuni colori. Chiudendo uno dei fori, la parte oscura della porzione dell' orlo del circolo, che rimaneva, prendeva un nuovo splendore, lasciando cadere di nuovo la seconda immagine, tornava ad offuscarsi. Ora, la luce del secondo circolo aggiungendosi a quella del primo, parrebbe che l'illuminazione delle due porzioni degli orli delle parti sovrapposte avesse dovuto riuscire più viva, come lo era nel loro mezzo, ed invece diveniva più fosca; per lo contrario, levando la luce del secondo circolo, diveniva più forte: dunque, conchiuse Grimaldi, la luce aggiunta a luce produce talvolta oscurità, come la luce sottratta da luce produce illuminazione.

2. L' esame di questi fenomeni, ripreso in questi ultimi tempi da Young e da Fresnel, è stato il punto di partenza da cui questi celebri fisici hanno mosso per scorrere tutte le parti dell' Ottica ed

arricchirle di mirabili scoperte coll' applicazione del sistema delle ondulazioni, che hanno fatto rivivere con tanto successo.

Volendo dare la spiegazione di questi fenomeni, non che di altri che dipendono dagli stessi principii, ci conviene premettere l' analisi instituita da Fresnel di un interessante esperimento, il quale, più d' ogni altro, è atto a farci conoscere la natura della propagazione delle onde luminose.

Fresnel introdusse in una camera oscura un pennello di luce sensibilmente omogenea, cioè dotata di uno stesso grado di refrangibilità e d' uno stesso colore, come può ottenersi impiegando la luce di una piccola parte dello spettro solare, o quella che ha attraversato certi vetri colorati. Raccolse questa luce con una lente cilindrica di un corto fuoco in modo da formare un filo di luce, tanto sottile quanto è possibile, poi osservò la luce emanante da questo filo riflessa da due specchii metallici che facevano fra loro un angolo assai ottuso, o poco differente da due retti. L' esperienza è delicata, perchè è necessaria una grande esattezza in far sì che i due specchi non si soprassalgano l' un l' altro nella linea di loro giunzione, ma siano uniti in una linea retta in modo da formare come la superficie continua di uno stesso piano, spezzato con un angolo poco differente da due retti.

La Figura 41 rappresenta una sezione orizzontale dell' apparecchio, nella supposizione che tanto il filo di luce che l' intersezione dei due specchii siano verticali o perpendicolari al piano della figura. Il punto L dinota la sezione del filo luminoso, ed $S\,S'$, $S'\,S''$ le sezioni dei due specchii. Fresnel portandosi dietro del luogo E sulla linea $E\,S'$, dove i raggi riflessi dai due specchii si unirebbero facendo angoli eguali con questa linea, osservò coll' occhio armato di una lente gli effetti luminosi che in quel luogo risultavano dal concorso delle luci delle due immagini riflesse, e notò: 1.ma Una serie di frange brillanti ed oscure, tutte perpendicolari alla linea che nel piano della figura, unirebbe le due immagini, cioè nel caso supposto, tutte parallele alle immagini stesse dei fili luminosi. Questa serie era simmetrica da una parte e dall' altra della linea $E\,S'$, che spartiva per metà l' angolo sotteso dalle due immagini riflesse: nel mezzo dell' angolo vi era una striscia brillante, seguivano due bande assai oscure poste una da una parte, e l' altra dall' altra parte della striscia di mezzo, ciascuna di esse era seguita da una striscia brillante, poi succedeva di nuovo una banda oscura e così di seguito. Le bande oscure si mantenevano di un nero cupo nelle frange di secondo e terz' ordine, e le striscie lu-

minose erano vive; in seguito il loro contrasto diveniva sempre meno pronunciato, e le frange più vicine fra loro; 2.da coprendo uno degli specchii, od arrestando con un diaframma la luce che cadeva sulla sua superficie, le frange sparivano, e non rimaneva che un' illuminazione uniforme.

Analizziamo questi fenomeni. La luce diffondendosi dal filo luminoso per superficie cilindriche basterà che consideriamo ciò che ha luogo nella sezione rappresentata nel piano della figura, che lo stesso succederà in tutte le altre sezioni che si possono condurre per tutti i punti del filo luminoso perpendicolarmente alla sua lunghezza: l'oggetto per cui nell'esperienza fu impiegato un filo luminoso, in luogo di un punto, non essendo stato altro che di rendere il fenomeno più esteso e visibile. Sia dunque, nel piano della figura, E il punto in cui è situato l'occhio dell'osservatore, od il fuoco della lente con cui le frange sono osservate. Le immagini del punto luminoso L devono, secondo le leggi della riflessione, essere vedute nelle direzioni EA, EB come se provenissero da due oggetti A e B così situati, che, conducendo sopra la retta $SS'p$ la perpendicolare LA, e sopra la retta, $S'S''q$ la perpendicolare LB, si avesse $Lp = pA$, $Lq = qB$ e quindi anche $LI = IA$ e $LJ = JB$. Le onde cilindriche dunque, che emanano da L, arrivate rispettivamente sugli specchi SS', $S'S''$, si propagheranno dopo la riflessione, quelle dello specchio SS' come se provenissero dal punto A, e quelle riflesse dallo specchio $S'S''$ come se provenissero dal punto B. Rappresentiamo con $U_1 U_1$, $U_2 U_2$, $U_3 U_3$ ec. il primo sistema d'onde, e con $O_1 O_1$, $O_2 O_2$, $O_3 O_3$ ec. il secondo (1). È evidente, che stando la CE perpendicolare sul mezzo di AB, le onde dell'uno e dell'altro sistema, che come tutte originate nel punto L, sono concordanti ad una stessa distanza da L, s' incontreranno tutte colla stessa fase su questa linea CE, i cui punti, essendo tutti equidistanti da A e B, lo sono anche da L, perchè $IL = IA$, e $JL = JB$. Sulla linea CE vi sarà adunque perpetua concordanza di onde, esse si sovrapporranno, e si scorgerà quindi nel suo luogo una linea chiara illuminata.

Dividiamo ciascuna onda dei due sistemi, nelle due parti impulsiva ed appulsiva, con delle linee punteggiate. Per motivo dell'obbliquità dei due sistemi, le onde che s' incontrano concordanti sulla

(1) Nella figura siamo stati obbligati di esagerare la grandezza di queste onde, per rendere visibili le parti su cui dobbiamo ragionare, ma per essere come sono in natura, bisogna concepirle di una tenuità estrema.

linea $C\,E$, non lo saranno più all'allontanarsi da essa. Anzi se si considerano le stesse onde, quando quelle di un sistema sono gia restate indietro da quelle dell'altro di una mezza ondulazione, come nelle due linee $b\,b$, $b'\,b'$, le une incontreranno sempre le altre in uno stato opposto di fase, esse interferiranno quindi continuamente, e su queste linee esisterà una oscurità perpetua. Dopo ad una maggior distanza dalla linea $C\,E$, quando le onde corrispondenti dei due sistemi saranno separate da una intera ondulazione, come sulle linee $c\,c$, $c'\,c'$, si troveranno di nuovo in concordanza e produrranno sulle dette linee delle striscie luminose.

Continuando così il discorso si conchiuderà che, al partire dalla linea $E\,D$, le onde s' incontreranno alternativamente in uno stato di concordanza e discordanza ad intervalli, che nei primi incontri saranno presso che eguali in modo da generare successivamente le immagini di frange luminose frammischiate di linee oscure tutte prossimamente equidistanti, come mostrò l'esperienza.

La considerazione dell'esistenza di onde luminose, combinata col principio delle interferenze, dà così una spiegazione semplice e diretta di questo fenomeno notabile, che non sarebbe possibile di dedurre dal sistema dell'emissione senza qualche particolare ipotesi sulla natura delle molecole luminose, creata a posta per interpretare il fatto. È perciò che si deve risguardare questo fenomeno come uno dei fatti più concludenti che servono di base al sistema delle ondulazioni.

3. Che l'apparizione delle frange sia dovuta all' interferenza dei due sistemi d'onde, se ne ha la prova dalla seconda parte dell'esperimento, poichè soppresso un sistema di onde, le frange spariscono, ed il chiarore prodotto dalla riflessione di un solo specchio, diventa uniforme. La sovrapposizione della luce riflessa dal secondo specchio produce dunque ora un aumento ora una diminuzione di splendore, secondo una successione la cui legge il sistema delle ondulazioni chiaramente dimostra.

4. Le linee $b\,b$, $b'\,b'$, $c\,c$, $c'\,c'$ ec. sono formate da punti le cui distanze dai due punti fissi A e B differiscono di una quantità costante, cioè rispettivamente di una, di due o più semiondulazioni. Queste linee sono dunque, come si dimostra in geometria, delle iperbole aventi tutte i loro fuochi in A e B, ed i cui assi non trasversi sono rispettivamente la lunghezza di una, di due o più semiondulazioni (1). Le lunghezze delle ondulazioni luminose es-

(1) Vedasi la Nota I.

sendo però tenuissime, le curve bb, cc ec. piegano tanto poco che si possono confondere sensibilmente con delle linee rette.

5. Fresnel ponendo un micrometro filare nel fuoco della lente con cui osservava le frange potè misurare con esattezza gli intervalli bb', cc' ec. fra due bande nere poste ai lati della frangia chiara del mezzo, e quindi dedurre le lunghezze delle onde luminose.

Infatti se riflettiamo, che, (Fig. 41) l'angolo AEB è assai piccolo, e che per l'estrema piccolezza delle onde luminose, gli archi Eb, bl si possono prendere per delle rette perpendicolari rispettivamente ad EA ed EB, conchiuderemo che AEB ed Ebl sono due triangoli simili, e che perciò dinotando con d la distanza misurata $bb' = 2Eb$, fra le due bande oscure, e con l la lunghezza $2El$ di una ondulazione, si ha

$$EB : AB :: \tfrac{1}{2}d : \tfrac{1}{2}l;$$

e perciò

$$l = d\frac{AB}{EB}.$$

Se si chiama $2I$ l'angolo AEB compreso fra le due immagini riflesse, che Fresnel ha misurato col cerchio ripetitore, e che quando il punto luminoso L è lontano può considerarsi prossimamente eguale al doppio del supplemento di quello fatto dai due specchii, (1), si ha (Legendre Trigon. XLII)

$$\sin I = \frac{\tfrac{1}{2}AB}{EB}:$$

dunque sarà

$$l = 2d\sin I;$$

così per mezzo dei due elementi misurati d ed I si potrà calcolare la lunghezza l, di una ondulazione.

Un risultamento notevole si presenta a questo proposito. Ripetendo l'esperimento con luci di diverso colore o refrangibilità, le misure dirette danno per d dei valori diversi, e quindi risultano per l delle lunghezze diverse. Si trova che, in generale, alle luci meno rifrangibili corrispondono dei valori di l maggiori, ed alle luci più rifrangibili dei valori di l minori. Questi risultamenti ci conducono quindi ad una conseguenza delle più importanti nell'Ottica, che le luci meno rifrangibili sono costituite da ondulazioni dell'e-

(1) Vedasi la Nota II.

tere più lunghe, e le più refrangibili da ondulazioni più corte. Ecco i valori a cui Fresnel è stato condotto per le lunghezze delle onde di diverso colore: quello delle onde dei raggi rossi è stato calcolato direttamente con esperimenti suoi proprii e colle formole date sopra; i rapporti con quelli degli altri colori risultano da misure che Newton aveva già ottenuto con altri esperimenti, che riferiremo in seguito.

Lunghezze espresse in milionesimi di millimetro, delle onde corrispondenti ai colori che presentano le diverse parti dello spettro solare.

LIMITI DEI COLORI PRINCIPALI	VALORI ESTREMI, di l	COLORI PRINCIPALI	VALORI MEDII di l
Violetto-estremo .	0mm,000406		
		Violetto	0mm,000423
Violetto-Indaco. .	0 ,000439		
		Indaco	0 ,000449
Indaco-Azzurro. .	0 ,000459		
		Azzurro	0 ,000475
Azzurro-Verde . .	0 ,000492		
		Verde	0 ,000512
Verde-Giallo . . .	0 ,000532		
		Giallo	0 ,000551
Giallo-Aranciato .	0 ,000571		
		Aranciato	0 ,000583
Aranciato-Rosso .	0 ,000596		
		Rosso	0 ,000620
Rosso-estremo . .	0 ,000645		

È mirabile l'osservare come per mezzo dei fenomeni delle interferenze i Fisici siano riusciti a determinare delle lunghezze così minime, che a prima vista sembra che debbano sottrarsi ad ogni mezzo di misurazione.

6. Se immaginiamo che il filo luminoso L venga un tantino rimosso dalla sua posizione, è evidente che le luci riflesse dovranno tutte trasportarsi un poco, avvicinandosi od allontanandosi contemporaneamente dalla perpendicolare agli specchii, e quindi anche le frange devono rimuoversi. In vece di spostare il filo supponiamo che esso venga ad acquistare una larghezza sensibile, allora le diverse linee, in cui la sua larghezza potrà concepirsi suddivisa, produr-

ranno altrettanti sistemi particolari di frange gli uni annessi agli altri; e quindi ne avverrà, se il filo luminoso è un po'largo, che, le strisce luminose degli uni sovrapponendosi alle bande oscure degli altri, si confonderanno vicendevolmente, ed ogni apparizione di frange sparirà. Per questa ragione avviene che, onde questi effetti di diffrazione siano discernibili, è necessario che la luce emani da un oggetto di una sottigliezza d'alquanto inferiore alla larghezza delle frange. Questo spiega perchè la diffrazione non è osservabile comunemente come parrebbe a prima vista, ma solo in pochi casi particolari.

7. Se in luogo di una luce omogenea, cioè egualmente refrangibile, come si usa per osservare il fenomeno nella sua semplicità, s'impiega una luce bianca, composta di luci d'ineguale refrangibilità e colore, ciascuna di queste luci produce il suo sistema particolare di frange. In quello di color violetto, in cui le onde sono le più corte, le frange si trovano un po'più strette e serrate, ed in quello di color rosso, in cui le onde sono le più larghe, le frange sono più larghe e dilatate. I diversi sistemi di frange vengono a sovrapporsi gli uni agli altri, ma le loro parti non combaciandosi esattamente, i diversi colori non si mescolano nella proporzione necessaria per costituire il bianco, e ne nascono delle frange tinte di diversi colori, che si succedono con certo ordine, che analizzeremo in altra Lezione, ed ai quali si è dato il nome di colori *periodici*.

In generale quest'osservazione è applicabile a tutti i fenomeni d'interferenze che descriveremo in seguito. Per semplicità dei ragionamenti supporremo da principio d'impiegare una luce d'eguale refrangibilità, e determineremo i luoghi delle alternative di luce e d'ombra, dopo coll'immaginare sovrapposti i sistemi di frange appartenenti alle luci diversamente refrangibili, potremo figurarci la produzione delle frange a colori periodici.

8. I principii esposti sono sufficienti per darci la spiegazione d'alcuni fenomeni di diffrazione, per esempio il secondo, esposto all'art. 1, che attrasse l'attenzione di Grimaldi, e che ripetuto e modificato dal D.r Young gli aprì la via al suo gran principio delle interferenze. Questo fisico per rendere più apparente l'esperimento, in luogo di due fori rotondi come aveva fatto Grimaldi, impiegò due sottili fenditure; e facendo cadere la luce che passa per esse su d'un piano, ne osservò gli effetti. Allora vidde che si scorgono nella parte del piano illuminata contemporaneamente dalle due luci provenienti dalle due fenditure (Fig. 42), una serie di striscie o frange oscure e brillanti parallele alle fenditure. Chiu-

dendo una delle fenditure notò che le frange oscure sparivano, ed il piano prendeva un' illuminazione uniforme.

L' analogia, o, per dir meglio, l' identità di questo fenomeno con quello prodotto da Fresnel coi due specchii è evidente. Le fenditure tengono qui il luogo delle due immagini riflesse dagli specchii: ma Fresnel ha arrecato un perfezionamento all' esperimento, perchè la luce essendo regolarmente riflessa dagli specchii, la produzione del fenomeno è più semplice, nè lascia sussistere il dubbio che il fenomeno provenga dall' influenza che potrebbero esercitare gli orli delle fenditure nel deflettere la luce, come i seguaci del sistema dell' emissione lo avevano supposto.

Nell' esperimento del P. Grimaldi il mezzo dei due segmenti di cerchio sovraposti sta in luogo della striscia luminosa di mezzo in quello di Fresnel, ed i due orli oscuri di questi segmenti stanno in luogo delle due bande nere adiacenti.

9. Il Sig. Arago ha ripetuto l' esperimento del D. Young e di Fresnel con una modificazione che è mirabilmente atta a dare una confermazione del principio che abbiamo impiegato per spiegare la rifrazione, cioè che la luce si propaga più lentamente nei mezzi più rifrangenti. Egli fece passare la luce proveniente da una delle fenditure, o riflessa da uno degli specchi, attraverso una lamina di mica od una sottile foglia di vetro soffiato alla lampada, ed osservò che le frange erano trasportate dalla parte della fenditura la cui luce aveva attraversato la lamina. Così nella Figura 41, suppenendo che la luce trasmessa dalla lamina sia quella proveniente da B o da J, i centri delle frange c, b, E, b', c' erano trasportati da E verso b' giusto come se le superficie cilindriche delle onde rappresentate da $O_1 O_1$, $O_2 O_2$, $O_3 O_3$ ec. fossero descritte con raggi minori o si fossero avvicinate al centro B, per aver percorso uno spazio minore, in virtù del ritardo sofferto nell' attraversare la lamina. Il Sig. Arago si è valso ultimamente di questo principio per costruire uno stromento metereologico con cui esplorare la densità dell' aria atmosferica, e che ha chiamato Barometro, Termometro o refrattore ottico (1).

10. Una discussione particolare merita il caso in cui non più due sistemi distinti d' onde interferiscano fra loro, come negli esempii precedenti, ma un' alternazione di chiaro d' ombra più o meno intensa sia prodotta nel confine di un solo sistema che provenga da una fonte sottile di luce, e che sia intercettato in

(1) Comp. rend. de l'Académie des Sciences. 23 Mai 1840.

parte. Per osservare questo fenomeno nella maggiore semplicità e cospicuità, bisogna introdurre in una stanza oscura una porzione di luce omogenea, facendola passare, per esempio, attraverso di un'apertura $A A'$ (Fig. 43), coperta di uu vetro di color rosso. Si dirige questa luce sopra una lente cilindrica L di corto fuoco, col suo asse verticale, di modo che venga a formare nel fuoco F come una linea luminosa di color rosso parallela all'asse della lente. Da questa linea si diramerà al di là del fuoco una luce divergente, e se questa si riceverà sopra un piano verticale $P_1 P_1$, la superficie di questo piano si troverà tutta egualmente illuminata. Intercettisi ora parte di questa luce con un diafragma $D G$, il cui spigolo sia ben tagliente e verticale, l'ombra che questo spigolo progetterà sul piano non sarà una linea retta ben terminata ma sfumata, e quello che è più notabile, al partire da questa linea andando verso lo spazio che resta ancora illuminato, si osserveranno una quantità di striscie o frange P, P', P'', P''', P^{iv}, P^{v} ec. tutte parallele fra loro ed alla linea dell'ombra, successivamente più chiare e più oscure, le cui differenze di luce ed ombra e le cui distanze reciproche vanno diminuendo più si allontanano dalla linea di confine della parte oscura del piano, e finiscono ad una certa distanza col non essere più percettibili.

Si può concepire la ragione di questo fenomeno analizzando l'effetto delle onde cilindriche, che emanano del filo luminoso F, all'atto che incontrano il diafragma $D G$. Sia il punto F (Fig. 44) la sezione perpendicolare del filo di luce; $D M C$, il circolo che rappresenta la sezione delle onde luminose quando arrivano in contatto col piano $D G$; e $P_1 P_1$ la sezione del piano illuminato.

Cominciamo dal considerare in questo piano il punto P situato sulla linea nella quale il piano illuminato taglia il piano passante pel filo luminoso, e pell'orlo del diafragma, e che si chiama la linea di confine dell'ombra geometrica. Dividendo l'arco dell'onda $D M C$ in tante parti $D 1$, 12, 23, 34 ec, tali che le differenze $P1 - PD$, $P2 - P1$, $P3 - P2$, $P4 - P3$ ec. risultino tutte eguali fra loro, ed eguali alla lunghezza di una mezza ondulazione, consideriamo l'effetto che devono produrre le vibrazioni delle singole parti $D 1$, $1 2$, $2 3$ ec. sull'illuminazione del punto P. Le vibrazioni che partono dal latercolo $D 1$ eccitano delle onde che esercitano un effetto più efficace per illuminare il punto P, e formano, come abbiamo detto nella precedente Lezione, la porzione di inviluppante delle onde tangenti. Le vibrazioni che partono dal latercolo 12 eccitano delle onde secanti sul

punto P un po' meno efficaci ad illuminarlo, ma che lo sono un po' più di quelle che partono dal latercolo 23. Quelle del latercolo 23 saranno un po' più efficaci di quelle del latercolo 34, e così successivamente. Bisogna di più tener presente, che mentre le onde tangenti provenienti da D 1 producono un effetto ed arrivano, per esempio, al punto P durante la semiondulazione impulsiva, quelle che partono dal latercolo seguente 12, il cui centro dista di una mezza ondulazione di più, arrivano nello stato opposto, cioè durante la semiondulazione appulsiva, e producono l'effetto opposto. Così l'illuminazione che potrebbe arrecare il latercolo D 1 è in gran parte distrutta da quella del latercolo 12. Similmente si deve dire del latercolo 23 rispetto al 34, e così di seguito per ogni coppia di due latercoli successivi.

Dinotiamo colla serie a_1, a_2, a_3, ec. rispettivamente le azioni od intensità di luce provenienti dai singoli latercoli D 1, 12, 23 ec. la illuminazione del punto P sarà il risultamento delle differenze d' azioni

$$a_1 - a_2 \quad , \quad a_3 - a_4 \quad , \quad a_5 - a_6 \quad , \quad \text{ec.}$$

e dobbiamo osservare che la legge dell'indebolimento successivo di queste azioni è tale, che tanto le a_1, a_2, a_3, a_4 ec. come le precedenti differenze formano due serie di termini decrescenti.

Indicando con Σ la somma di tutte queste differenze potremo rappresentare l'illuminazione del punto P, o della linea verticale che passa per P, la quale proviene da una azione concordante con a_1, colla formola. Illum. $P = \Sigma$.

Quando non esistesse il diafragma, l'altra metà di arco $D\ C'$ produrrebbe un'illuminazione eguale nel punto P, così che si deve conchiudere che esistendo il diafragma, il punto P è meno illuminato della metà, che se l'onda cilindrica fosse ricevuta tutta intera.

Passiamo al punto seguente P' che trovasi nel piano che passa pel punto luminoso e per la sezione 1 dell'onda (Fig. 45). Siccome l'onda si può considerare come indefinita dalla parte 1, 2, 3 ec., l'illuminazione che riceverà P', da questa parte dell'onda, sarà la stessa che quella che riceve il punto P dalla semionda D, 1, 2, 3 ec.: ma di più l'etere in P' riceverà l'azione che vi apportano le onde provenienti da 1 D dalla parte opposta, la quale è espressa da a_1. Come l'azione di questo latercolo è in concordanza con quella della somma Σ, l'illuminazione totale del punto P' sarà espressa da $\Sigma + a_1$ o sia si avrà Illum. $P' =$

$\Sigma + a_1$, e quindi sarà maggiore di quella del punto P. Pel punto P' passerà adunque una linea più brillante.

Consideriamo ora il terzo punto P'' posto sulla sezione che passa pel centro F e pel punto 2 (fig. 46), talchè 21, ed 1 D siano rispettivamente eguali a D1 ed 12 della figura 44. Anche per questo punto l'illuminazione dell'arco indefinito 2, 1, 2, 3, 4 ec. sarà espressa da Σ, ma sull'etere in questo punto opereranno di più le azioni a_1, a_2, corrispondenti rispettivamente alle onde che partono da 21, ed 1 D, e come queste due azioni sono opposte, l'illuminazione non sarà aumentata che di $a_1 - a_2$ e perciò l'illuminazione del punto P'' sarà espressa da $\Sigma + a_1 - a_2$, e quindi pel punto P'' passerà una linea più oscura o meno brillante che in P'.

Continuando così il ragionamento l'illuminazione del punto P''' sarà data da $\Sigma + a_1 - a_2 + a_3$ e quindi nel punto P''' tornerà ad apparire una linea brillante, ma come a_2 è maggiore di a_3, l'espressione $\Sigma + a_1 - a_2 + a_3$ sarà minore di $\Sigma + a_1$, e perciò questa linea brillante lo sarà un po' meno di quella che passa per P'.

Si troverà pure che per P^{v}, passerà una linea oscura, ma un poco meno oscura di quella che passa per P'', e così in successione si avranno alternativamente delle linee chiare ed oscure, ma sempre meno differenti fra loro, talchè dopo un certo numero diverranno sensibilmente eguali, e non vi saranno più frange discernibili, come mostra l'esperienza.

È facile, dopo l'esposto, il riconoscere che le curve DP', DP'', DP''', ec. fig. 43 che disegnano nello spazio intermediario le parti illuminate ed oscure, sono delle iperbole, perchè, preso un punto qualunque X su una di queste curve, questo punto ha la proprietà che le sue distanze dai punti fissi D ed F differiscono sempre della distanza DF diminuita della lunghezza di tante semiondulazioni qual'è l'ordine della curva illuminata od oscura che occupa, il chè è una proprietà caratteristica dei punti d'una iperbola. Vedasi la nota 1.

11. Questo risultamento non è però che approssimativo, perchè l'accumulare l'effetto delle vibrazioni in tanti archi D1, 12, 23 ec. considerati isolatamente, non è stato fatto che per semplicità del discorso. Fresnel, che, con una teoria superiore ai mezzi matematici che ci limitiamo ad impiegare, ha considerato gli effetti delle vibrazioni dell'arco DMC in un modo continuo, e servendosi della legge delle velocità di vibrazione adottata nell'articolo 7 della Le-

zione XXVI, ha trovato più rigorosamente che tutte queste iperbole hanno uno stesso semiasse a non traverso, ed un semiasse b traverso espressi da

$$a = \tfrac{1}{2} D F \qquad\qquad b = \nu \sqrt{\frac{l \, . \, D F}{2}}$$

l essendo la lunghezza di una semiondulazione.

I numeri ν e le intensità della luce corrispondenti alle diverse curve essendo dati dalla tavola seguente, nella quale il valore di Σ, o l'intensità della luce prodotta dalla semionda sul limite dell'ombra geometrica, è presa per unità.

ORDINI DELLE CURVE	MASSIMI E MINIMI DI LUCE	VALORI DI ν	INTENSITA' DELLA LUCE
1.ma	1.mo Massimo	1,2172	2,7415
2.da	1.mo Minimo	1,8726	1,5570
3.za	2.do Massimo	2,3449	2,3990
4.ta	2.do Minimo	2,7392	1,6867
5.ta	3.zo Massimo	3,0820	2,3022
6.ta	3.zo Minimo	3,3913	1,7440
7.ma	4.to Massimo	3,6742	2,2523
8.va	4.to Minimo	3,9372	1,7783
9.na	5.to Massimo	4,1832	2,2206
10.ma	5.to Minimo	4,4160	1,8014
11.ma	6.to Massimo	4,6069	2,1985
12.ma	6.to Minimo	4,8479	1,8185
13.ma	7.mo Massimo	5,0500	2,1810
14.ma	7.mo Minimo	5,2442	1,8317

Da questa tavola si vede che, le differenze dei numeri ν andan-

do continuamente diminuendo, i semiassi traversi delle iperbole successive devono differire meno, e quindi le curve devono andare riserrandosi più si scostano dall'ombra geometrica, e le frange sul piano devono mostrarsi più fitte. Le intensità di queste frange, cioè la differenza di luce fra due linee successive, una chiara e l'altra meno chiara, va sempre più diminuendo, scostandosi dallo stesso confine, ciò che spiega come, dopo un breve tratto, la luce sul piano diviene sensibilmente uniforme.

Nel confine dell'ombra geometrica la luce non sparisce subitamente, ma il suo decrescimento è tanto rapido, come lo ha provato Fresnel col calcolo, che l'occhio non può discernerlo bene. Fresnel ha trovato di più che il confine DF, fra la parte dello spazio illuminato e quella che resta in ombra, non è propriamente un piano, come è disegnato nella figura, ma sì bene una superficie cilindrica coll'asse verticale, e la cui direttrice sarebbe un'iperbola dello stesso genere delle su mentovate nel caso che la fonte da cui proviene la luce fosse vicina; e si convertirebbe in una parabola quando la stessa fonte fosse assai lontana. In quest'ultimo caso, la parabola direttrice della superficie cilindrica, che separasse le due parti dello spazio, in una delle quali l'intensità della luce fosse maggiore e nell'altra minore di $\frac{1}{100}$ della intensità sul confine geometrico avrebbe per parametro $3{,}2 . l$ e quindi, per l'estrema piccolezza dell'ondulazione l, la direttrice suddetta sarebbe rappresentata da un ramo di curva presso che rettilineo.

Seguendo l'analisi che abbiamo fatto di quest'ultimo esperimento, sarebbe facile il dedurre i principii, e la ragione delle frange osservate nel primo esperimento del Grimaldi su riferito, e considerando le interferenze della luce che passa presso i due orli di un corpo sottile, sarebbe facile altresì cogli stessi di dare la spiegazione delle frange interne nell'ombra, osservate pure dal Grimaldi. Ma questa Lezione si è già ingrossata di troppo, per estenderci ancora a discutere queste particolarità, nude per altro di alcun nuovo principio.

LEZIONE XXIX.

Applicazioni del principio delle interferenze.

Fenomeni dei colori delle lamine sottili.

1. I fenomeni che andiamo a descrivere sono stati studiati e discussi dal gran Newton, che li ha illustrati con una celebre teoria conosciuta sotto il nome di *accessi di facile trasmissione, e di facile riflessione.* Noi li esporremo succintamente nel modo con cui Newton li ha analizzati, per darne poi la spiegazione, come ulteriore applicazione del principio delle interferenze.

Quando si applica, come ha fatto Newton, una lente di un lungo fuoco talchè la sua convessità sia appena percettibile, sopra un vetro piano, o sopra la superficie piana di una lente piano-convessa (Fig. 47) rendendo il contatto il più perfetto possibile, senza però alterare la figura dei vetri colla pressione, e poi si fa cadere sopra di essa una luce d' eguale refrangibilità, o dello stesso colore prismatico, vi si scorgono i seguenti fenomeni.

Osservando la luce riflessa per disopra dell'apparecchio, si vede nel punto di contatto del piano colla lente un punto o macchia nera; questa macchia è circondata da un anello del colore della luce che s' impiega; a quest' anello chiaro succede uno oscuro, poi un altro chiaro, e così di seguito.

Se invece si osserva per disotto la luce trasmessa, si nota nel centro un punto o macchia colorata dello stesso colore della luce impiegata, poi un cerchio oscuro che la circonda, in seguito un cerchio colorato, e così successivamente, talchè ad ogni cerchio o anello colorato visto superiormente per riflessione corrisponde al disotto un anello oscuro visto per trasmissione, e viceversa, colla differenza però, che il contrasto fra le tinte colorate, e le oscurità date per riflessione è molto più vivido e pronunciato, che fra quelle date per trasmissione.

Newton comparò fra loro i diametri dei cerchi od anelli oscuri e colorati che andavano sempre più riserrandosi fra loro ed assottigliandosi quanto più divenivano grandi, e trovò che i quadrati dei diametri degli anelli oscuri per riflessione seguivano le ragioni dei numeri pari

2. 8

(*a*) 0 , 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , ec.;

ed i quadrati dei diametri degli anelli colorati, la ragione dei numeri impari

(*b*) 1 , 3 , 5 , 7 , 9 , 11, ec.;

e viceversa succedeva in conseguenza per quelli di trasmissione.

Riflettendo quindi alla proprietà geometrica, che i seni versi sono nè piccoli archi proporzionali ai quadrati dei seni, e che nell' esperimento che discutiamo i seni sono corrispondenti ai raggi *C* 1, *C* 2, *C* 3, degli anelli, ed i seni versi corrispondono agli intervalli vuoti 11', 22', 33', 44', ec. compresi fra il piano del cristallo e la lente sovrapposta (1), Newton dedusse che la luce nel percorrere l'intervallo fra i due cristalli si trovava successivamente in una disposizione ad essere di preferenza trasmessa o riflessa, secondo che aveva percosso un numero impari od un numero pari di volte un certo spazio 11'; o che torna allo stesso, che la luce perdeva e riassumeva questa disposizione a periodi successivi di tempo, tutti eguali alla durata che impiegava a percorrere uno di questi spazii, che chiamò *intervalli di facil trasmissione e di facile riflessione.*

2. Per determinare quale era la lunghezza di questi intervalli, Newton misurò con grande precisione il diametro del quinto anello oscuro, che ottenne con una lente la cui superficie era un segmento di una sfera di 91 piedi inglesi di raggio, e trovò questo diametro di $\frac{1}{5}$ di pollice. Ripetè un esperimento analogo con un' altra lente di 92 piedi di raggio, e trovò pel diametro dello stesso anello $\frac{121}{600}$. Applicando a queste misure alcune piccole correzioni, dipendenti dalla rifrazione del cristallo della lente attraverso alla quale guardava, e dall' obliquità delle visuali, Newton calcolò, che la grossezza della lamina d' aria, e dello spazio compreso fra i vetri, era, per quell' anello, sensibilmente eguale nei due casi, ed era per un medio di $\frac{1}{89000}$ di pollice. (2) La concordanza dei due numeri gli provò che questo risultamento era indipendente dalla natura dei vetri, la loro composizione essendo differente nelle due lenti, e per convincersene maggiormente ripetè più volte l' esperimento, ora sottoponendo la lente al vetro piano, ora impiegando dei vetri piani diversi.

(1) Per rendere discernibili le parti si è data, nella figura, alla lente una convessità molto sensibile, e le linee 11', 22' ec. sono di una lunghezza straordinariamente grande, in confronto di quella che hanno nell' esperimento.

(2) Newtonis. Optices, Lib. II. Pars. 1. Observatio VI.

Il quinto anello di cui Newton prese la misura, corrisponde nella serie (*a*) dei quadrati de' diametri degli anelli oscuri al numero 10; dividendo quindi per 10 il valore della grossezza sopra trovata si avrà $\frac{1}{178000}$ di pollice inglese pel valore dell' intervallo di un accesso di facile trasmissione o riflessione, cioè per la lunghezza dello spazio che la luce corre durante il tempo che passa dalla disposizione della facile trasmissione a quella della facile riflessione.

La grandezza di quest' accesso è quella che appartiene al colore dello spettro che in grado di refrangibilità corrisponde al limite fra l' aranciato ed il giallo, *colore flavo citrino* (1). Per aver poi quelle degli accessi delle luci degli altri gradi di refrangibilità Newton trovò una regola empirica notevole, che ha molta relazione con quella data all' art. 10 della Lezione XXIV. Se si indicano con *R . A . G . V . α , I . U* i colori principali dello spettro, le lunghezze rispettive degli intervalli degli accessi sono (2) nella proporzione dei numeri sottoscritti.

limit. *R*	*R A*	*A G*	*G V*	*V α*	*α I*	*I U*	limit. *U*
$(1)^{\frac{2}{3}}$	$\left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{2}{3}}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2}{3}}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$	$\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$	$\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{2}{3}}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$
1,0000	0,9243	0,8855	0,8255	0,7631	0,7114	0,6814	0,63000

Nella prima linea le due lettere unite indicano che la luce, il cui accesso si considera, è quella che sta nel confine dei colori dinotati dalle lettere stesse; nella terza linea sono espressi in decimali i numeri proporzionali delle lunghezze degli accessi dati dalla seconda linea. Si può notare che la serie dei numeri de' cui quadrati si debbono prendere le radici cubiche, sono proporzionali alle lunghezze delle corde della gamma di un tuono minore. Vedasi la Nota I.

Come la lunghezza dell' intervallo dell' accesso corrispondente ad *A G* è stato trovato di $\frac{1}{178000}$ di pollice inglese, equivalente a 0^{m},000143, e questo è rappresentato nella serie precedente da 0,8855, facendo le proporzioni per tutti gli altri numeri, si troveranno gli intervalli degli accessi per gli altri colori espressi in millionesimi di milimetro come segue

limit. *R*	*R A*	*A G*	*G V*	*V A*	*A S*	*S U*	limit. *U*
0^{mm},000161	0,000149	0,000143	0,000133	0,000123	0,000115	0,000110	0,000102

(1) New. Optices. Liber II. Observ. 16.

(2) New. Optices. Lib. II. pars. II. Considerationes super ec.

Paragonando questi valori con quelli delle lunghezze delle onde dei diversi colori, dati nella Lezione precedente, si vede che tali intervalli degli accessi sono il quarto di quelle lunghezze, e si vede per quale artificio i Fisici sono arrivati a determinare questi intervalli, che per la loro piccolezza sarebbe impossibile di percepire e misurare direttamente.

3. Newton, invece di lasciare occupato dall' aria lo spazio fra il vetro piano e la lente, v' introdusse dell' acqua od altri liquidi, e notò che per questa introduzione gli anelli venivano a cambiar di grandezza. Paragonando queste variazioni tra loro, riscontrò che gli intervalli degli accessi, per diversi liquidi introdotti, seguivano la ragione inversa degli indici rispettivi di rifrazione: così, quando il liquido introdotto era l' acqua, come l' indice di rifrazione di un raggio di luce che passa dall' aria nell' acqua è $\frac{4}{3}$, le lunghezze degli intervalli degli accessi per l' acqua venivano ad essere $\frac{3}{4}$ di quelli determinati di sopra per l' aria.

4. I fenomeni descritti ricevono una spiegazione meccanica diretta quando si considerano, per gli anelli di riflessione, le interferenze dei sistemi d' onde riflesse alle superficie dei due vetri che comprendono lo spazio o vuoto, o pieno di un liquido, e per gli anelli trasmessi, le interferenze dei sistemi tanto di quelle onde che attraversano direttamente i due vetri, quanto di quelle che attraversano il vetro piano, dopo essere state riflesse prima dalla superficie interna del vetro piano e poi da quella della lente. Il D.r Young, che diede il primo questa spiegazione, per facilitare la concezione della medesima, ha premesso le seguenti considerazioni meccaniche.

Nella propagazione di un tremito attraverso dei mezzi elastici si possono distinguere tre casi, secondo che il tremito passa da un mezzo di una certa densità ad un altro di densità o eguale, o minore, o maggiore. Questi tre casi hanno un' analogia con quelli che alla fine della Lezione XII, abbiamo considerato rispetto all' urto de corpi elastici, in cui la massa della palla urtante era eguale, maggiore, o minore della palla urtata. Se la palla urtante ha una massa eguale alla urtata, la velocità della prima rimane estinta nell' urto e passa tutta nella seconda; se la palla urtante ha una massa maggiore conserva dopo l' urto una porzione della sua velocità nella direzione primitiva, e finalmente se la palla urtante ha minor massa, una porzione della sua velocità le è restituita, ma questa è in direzione contraria a quella che aveva prima.

I risultamenti dinamici ora accennati ci danno un' immagine di ciò che succede della propagazione di un tremito nel passaggio da uno ad un altro mezzo rifrangente. Se il primo mezzo ha una densità eguale al secondo, ciascuna falda comunica tutta la sua velocità alla seguente, poi ritorna in riposo; se il primo mezzo ha una densità maggiore, gli atomi conservano una porzione del loro tremito sia con una velocità nella direzione di prima, e questa porzione di tremito venendo a trasmettersi nello stesso mezzo si propaga per indietro; se il primo mezzo ha una densità minore, una parte dei tremiti trasmessi viene ripercossa ed agita i suoi atomi con una velocità opposta, e diffondendosi nello stesso mezzo si propaga pure per indietro. Queste conseguenze dedotte con una semplice analogia dai teoremi di Meccanica sull' urto dei corpi elastici (Lez. XII, art. 25) sono confermate dall' analisi, assoggettando al calcolo il problema della propagazione dei tremiti in due mezzi di densità differenti.

5. Applichiamo ora queste considerazioni alla propagazione delle onde nell' esperimento degli anelli di Newton. Considerando soltanto quelle riflessioni e trasmissioni della luce che c' interessano, come più influenti nella produzione dei fenomeni che si contemplano, si può osservare. 1.° Che la luce incidente è riflessa in piccola parte alla seconda superficie della lente, quando sta per passare nella falda d' aria intermedia fra i due vetri, ed è nella maggior parte trasmessa. 2.° Che essa è riflessa in piccola parte alla prima superficie del cristallo piano, ed è in gran parte trasmessa attraverso a questo cristallo. 3.° Che la prima di queste due ultime parti incontrando di nuovo la superficie inferiore della lente è pure trasmessa in gran parte, ed in una piccola parte riflessa. Quest' ultima parte riflessa darebbe dei nuovi raggi alla luce degli anelli visti per trasmissione, e riflettendosi ancora in parte sulla superficie interna del vetro piano darebbe anche dei nuovi raggi alla luce degli anelli visti per riflessione, e così di seguito; ma questi nuovi raggi assai deboli contribuiscono tanto poco all' effetto totale, che possiamo prescindere dal considerarli (1).

Il sistema d' onde che nasce alla prima riflessione sulla superficie inferiore della lente, e quello delle onde riflesse alla superficie superiore del vetro piano formano due sistemi d' onde sensibilmente paralleli, ma il secondo si trova indietro del primo di due volte la

(1) Si potrebbe vedere il modo di tenerne conto in una nota di Fresnel sur le phènomène des anneaux colorés. Ann. de Chim. et Phys. Tom. 21 pag. 125.

grossezza della lamina d'aria compresa fra i due vetri. Di più, il primo sistema è riflesso quando il raggio incidente sta per passare dal vetro nell'aria, cioè da un mezzo ove l'etere è più denso in uno dove è meno denso, e perciò le vibrazioni conservano la stessa direzione che nel raggio incidente. Nel secondo sistema invece le onde riflesse nascono quando il raggio incidente sta per passare dall'aria nel vetro, le vibrazioni si faranno quindi in verso contrario. Così, quando questi due sistemi si trovassero, per la differenza dei cammini che hanno percorso, in concordanza, dovremmo conchiudere che sono per lo contrario in discordanza, perchè le vibrazioni dell'uno sono opposte a quelle dell'altro; viceversa si direbbe se si trovassero in discordanza.

Considerando ora i luoghi dove gli intervalli fra i due vetri sono eguali a 0, 2, 4, 6, ec. quarti d'ondulazione, si vedrà che in essi il sistema delle onde riflesse dalla seconda superficie, cioè da quella del vetro piano, trovandosi indietro di 0, 1, 2, 3, ec. ondulazioni complete rispetto al sistema delle onde riflesse dalla prima superficie, cioè dalla superficie inferiore della lente, questi due sistemi sarebbero, per la differenza de'loro cammini, in concordanza (Lez. XXVI, art. 10), ma attesa l'opposizione delle loro vibrazioni, risulteranno realmente in discordanza, la luce sarà quindi distrutta, in questi luoghi, e vi corrisponderanno degli anelli oscuri.

Viceversa considerando i luoghi ove gli intervalli fra i vetri sono eguali a 1, 3, 5, 7 ec. quarti d'ondulazione, in essi il sistema delle onde riflesse dalla seconda superficie si troverà indietro di mezza, di una e mezza, di due e mezza ec. ondulazioni; e questo sistema sarebbe in discordanza con quello delle onde riflesse dalla prima superficie, però il verso in cui si fanno le vibrazioni essendo opposto, riusciranno con questo in concordanza, l'effetto dell'uno accrescerà quello dell'altro, e ne'luoghi stessi corrisponderanno degli anelli colorati.

Passiamo agli anelli visti per trasmissione. Questi nascono come abbiamo detto dall'interferenza della luce che passa direttamente con quella che è riflessa due volte, dalla seconda e poi dalla prima delle superficie interne dei due cristalli. Il sistema d'onde che forma la luce trasmessa direttamente si trova in avanti di quello che è trasmesso dopo due riflessioni, per due volte lo spazio compreso fra i due cristalli, e secondo che questo doppio intervallo è misurato da un numero pari o un numero dispari di semiondulazioni, ne nasce una concordanza o discordanza nelle vibrazioni dei due sistemi. Questa concordanza o discordanza non verrà alterata dal

rovesciamento di direzione che succede nelle velocità di vibrazione degli atomi, perchè un tale effetto, ripetendosi due volte restituisce alle vibrazioni la direzione primitiva. Così nei luoghi dove gli intervalli sono eguali a 0, 2, 4, 6 ec. quarti d' ondulazioni, essendovi concordanza, gli anelli saranno lucidi, e ne' luoghi dove gli intervalli corrisponderanno a 1, 3, 5, 7 ec. quarti d'ondulazione, gli anelli saranno oscuri.

Poichè la luce trasmessa direttamente, sotto un'incidenza pressochè perpendicolare è in copia assai maggiore di quella doppiamente riflessa delle due superficie, ne segue che la parte di luce distrutta nel primo sistema d'onde, per l'interferenza di quelle del secondo, sarà piccola, e gli anelli oscuri saranno soltanto un po' meno lucidi degli anelli chiari, come dimostra l' esperienza.

Per lo contrario siccome negli anelli visti per riflessione la luce riflessa dalla seconda superficie è presso che eguale a quella riflessa dalla prima, non essendo amendue che una piccola porzione della luce incidente, queste due luci colla loro interferenza si distruggono quasi totalmente, gli anelli oscuri sono sensibilmente neri, ed il loro contrasto cogli anelli colorati è bene pronunciato.

6. Se, in luogo di un piano di cristallo e di una lente sovrapposta, immaginiamo solamente una sottilissima lamina trasparente, alla cui superficie superiore ed inferiore succeda una riflessione parziale di luce, è evidente, per ciò che abbiamo esposto, che questa lamina parrà oscura o di un certo colore, secondo che la sua grossezza sarà o non sarà un piccolo numero dispari di quarti d'ondulazioni corrispondenti a quel colore. Ogni piccola porzione di questa lamina venendo divisa, darà separatamente lo stesso colore; di qui si concepisce che se le molecole dei corpi sono, come abbiamo ragione di credere, senza colore e trasparenti, e separate da intervalli vuoti, esse possono secondo la loro grossezza apparire di uno o d' altro colore. Tale è stata l'opinione di Newton sulla causa della produzione dei colori dei corpi: essa non è l' unica, come abbiamo detto nella Lezione XXV, ma Sir D.r Brewster ed altri Fisici hanno dimostrato, che il colore delle ali d' alcuni insetti, delle penne degli uccelli, delle scaglie dei pesci, degli strati d' ossidi metallici e di certe opalescenze è dovuta a questa causa.

7. Non abbiamo considerato che la luce incidente sotto la direzione quasi perpendicolare, nel qual caso la teoria esposta è direttamente applicabile. Se la luce cadesse con piccola obliquità su i due cristalli, o su le lamine sottili, si possono seguire, con approssimazione, gli stessi principj onde rintracciare la distanza reciproca o la

grossezza della lamina corrispondenti alla trasmissione o riflessione della luce, e la deduzione dei fenomeni in questo caso più generale esige soltanto un' applicazione di calcolo (1). In generale si trova che l' obliquità, quando non è grande, produce l' effetto di una diminuzione nella grossezza della lamina sottile, o nell'intervallo fra i due cristalli, proporzionale al coseno dell' angolo di rifrazione del raggio al penetrar nella lamina, o ciò che torna lo stesso al coseno dell' angolo di riflessione sulla seconda superficie, talchè gli anelli si allargano. Nelle obliquità maggiori il fenomeno si complica per un' altra proprietà della luce, che esporremo nel seguito, e per l' influenza delle scabrosità nelle superficie riflettenti.

8. Se invece di una luce omogenea, si fa uso della luce bianca del sole, ciascun colore, in cui si può considerare scomposto lo spettro, produce il suo sistema d' anelli, e dalla sovrapposizione dei differenti sistemi di tali anelli nascono delle iridi vario-pinte in cui i colori si succedono con un certo ordine, che Newton ha diligentemente osservato, e che ha descritto nella seguente tavola, nella quale le corrispondenti grossezze che egli ha calcolato sono espresse in milionesimi di pollice inglese (2).

(1) Vedasi la Nota II.

(2) New. Optices. Liber. II. Pars II. Considerationes super ec.

Grossezze delle lamine d' aria, d' acqua e di vetro colle quali la luce solare riflessa prende i colori notati nella seconda colonna.

ORDINI	COLORI RIFLESSI	GROSSEZZE dell'aria	GROSSEZZE dell'acqua	GROSSEZZE del vetro
1.° Ordine.	Nero intenso.	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{10}{31}$
	Nero	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{20}{31}$
	Comincia il nero	2	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{2}{7}$
	Azzurro.	$2\frac{2}{5}$	$1\frac{4}{5}$	$1\frac{11}{22}$
	Bianco	$5\frac{1}{4}$	$3\frac{7}{8}$	$3\frac{2}{5}$
	Giallo.	$7\frac{1}{9}$	$5\frac{1}{3}$	$4\frac{3}{5}$
	Aranciato.	8	6	$5\frac{1}{6}$
	Rosso	9	$6\frac{3}{4}$	$5\frac{4}{7}$
2.° Ordine.	Violetto.	$11\frac{1}{6}$	$8\frac{3}{8}$	$7\frac{1}{5}$
	Indaco	$12\frac{5}{6}$	$9\frac{5}{8}$	$8\frac{2}{11}$
	Azzurro.	14	$10\frac{1}{2}$	9
	Verde.	$15\frac{1}{8}$	$11\frac{1}{3}$	$9\frac{5}{7}$
	Giallo	$16\frac{2}{7}$	$12\frac{1}{5}$	$10\frac{2}{5}$
	Aranciato.	$17\frac{2}{9}$	13	$11\frac{1}{9}$
	Rosso chiaro	$18\frac{1}{3}$	$13\frac{3}{4}$	$11\frac{5}{6}$
	Rosso di cocciniglia. . .	$19\frac{2}{3}$	$14\frac{3}{4}$	$12\frac{2}{3}$
3.° Ordine.	Porpora.	21	$15\frac{3}{4}$	$13\frac{11}{20}$
	Indaco	$22\frac{1}{10}$	$16\frac{4}{7}$	$14\frac{1}{4}$
	Azzurro.	$23\frac{2}{5}$	$17\frac{11}{20}$	$15\frac{1}{10}$
	Verde.	$25\frac{1}{5}$	$18\frac{9}{10}$	$16\frac{1}{4}$
	Giallo.	$27\frac{1}{7}$	$20\frac{1}{3}$	$17\frac{1}{2}$
	Rosso	29	$21\frac{3}{4}$	$18\frac{5}{7}$
	Rosso ceruleo	32	24	$20\frac{2}{3}$

4.° Ordine.	Verde ceruleo	34	$25\frac{1}{2}$	22
	Verde	$35\frac{2}{7}$	$26\frac{1}{2}$	$22\frac{3}{4}$
	Verde giallognolo	36	27	$23\frac{2}{3}$
	Rosso	$40\frac{1}{3}$	$30\frac{1}{4}$	26
5.° Ordine.	Azzurro verdastro. . . .	46	$34\frac{1}{2}$	$29\frac{2}{3}$
	Rosso	$52\frac{1}{2}$	$39\frac{3}{8}$	34
6.° Ordine.	Azzurro verdastro. . . .	$58\frac{3}{4}$	44	38
	Rosso	65	$48\frac{3}{4}$	42
7.° Ordine.	Azzurro verdastro. . . .	71	$53\frac{1}{4}$	$45\frac{4}{5}$
	Bianco rossastro.	77	$57\frac{3}{4}$	$49\frac{2}{3}$

9. Si può trovare con approssimazione il colore composto che sarà riflesso o trasmesso da una lamina di una data grossezza per mezzo di una costruzione geometrica. La seguente, che credo dovuta a Sir. J. Herschel, mi pare la più semplice. Sia $R\,R'\,R''\,R'''$ ec. (Fig. 48) una curva serpeggiante, avente per asse $O\,X$ sul quale si contino le ascisse proporzionalmente alle grossezze della lamina che deve essere esposta alla luce bianca, e le ordinate $X\,Y$ siano proporzionali alle quantità di luce rossa, visibile per riflessione, corrispondente alla stessa grossezza. In principio quando la grossezza è nulla, la luce visibile riflessa è nulla, e l'ordinata $O\,R$ è zero, talchè la curva tocca l'asse; quando l'ascisse $O\,X'$ è proporzionale all'intervallo di un accesso, la luce riflessa è tutta visibile, e l'ordinata $X'\,R'$ è massima; quando l'ascissa $O\,X''$ è proporzionale all'intervallo di due accessi, la luce visibile torna ad essere nulla, e l'ordinata $X''\,R''$ torna pure zero, e così di seguito. L'andamento di questa curva si può presentare, con approssimazione, prendendo le ordinate proporzionali ai quadrati dei seni delle ascisse, considerate come archi, la lunghezza dell'ascissa $O\,X'$ corrispondente all'ordinata massima, equivalendo ad un quarto di circonferenza.

Le curve $A\,A'\,A''\,A'''$ ec., $G\,G'\,G''\,G'''$ ec., $V\,V'\,V''\,V'''$ ec., corrispondono agli altri colori; queste curve devono avere i loro serpeggiamenti più brevi, perchè gli intervalli degli accessi pei colori seguenti dello spettro vanno successivamente diminuendo di lunghezza. Le ordinate massime di ciascuna di queste curve po-

trebbero essere prese proporzionali agli archi che rappresentano i rispettivi colori nel cerchio descritto all' art. 10 della Lezione XXIV, almeno per la luce poco obliqua.

Ciò posto sia data la grossezza di una lamina sottile proporzionale, per esempio, ad OP, e si voglia conoscere quale sarà la tinta composta che sarà vista riflessa da questa lamina, su cui vada a cadere della luce bianca.

Nel punto P distante da O d' una quantità proporzionale al numero intero o frazionario d' accessi contenuti nella grossezza della lamina, si elevi una perpendicolare PQ all'asse OX, questa intersecherà tutte le curve, e le parti, comprese su questa perpendicolare fra le curve ed i rispettivi assi, saranno proporzionali alle quantità dei corrispondenti colori visibili colla riflessione della lamina.

Trovate così le quantità dei colori parziali, per avere la tinta composta, non abbiamo che a far uso della regola data all' art. 10 della Lezione XXIV. Si supporranno applicati ai centri di gravità p, q, r, s ec. degli archi del cerchio della Fig. 24, dei pesi rispettivamente proporzionali alle quantità dei colori parziali trovate, ed il centro comune di gravità di tai pesi ci darà il punto pel quale deve condursi il raggio che segnerà sulla circonferenza il luogo corrispondente al colore composto, il quale sarà più o meno pronunciato, secondo che l' ottenuto centro di gravità sarà più o meno discosto da quello del circolo.

Spettri prodotti dai reticoli.

10. Fraunhofer avendo sostituito al prisma, di cui faceva uso nell' esperimento descritto all' art. 3 della Lezione XXIV, un reticolo composto d' intervalli aperti e chiusi, o trasparenti ed opachi, tutti paralleli fra loro ed eguali, ma assai fitti, tali che ve ne fossero contenuti 10, 20, 100 nella larghezza di un solo millimetro, notò il seguente curioso fenomeno.

« La sottile fenditura nell' imposta della camera oscura si vedeva nel mezzo dell' apparecchio illuminata da una luce bianca, « coi confini ben terminati, come se il reticolo non esistesse, e « da un lato e dall' altro le apparenze erano esattamente simmetri- « che come le rappresenta la Figura 49 ».

Lo spazio, al di là dell' immagine bianca della fenditura, rimane per un certo tratto oscuro, poi segue uno spettro luminoso che presenta gli stessi colori dello spettro per rifrazione, colla

differenza però, che il violetto è per indentro, cioè si scosta meno dall' immagine della fenditura, ed il rosso è più infuori e per conseguenza più lontano dalla stessa immagine.

Questo primo spettro è isolato dal resto da un altro piccolo spazio oscuro, ed è seguito poi da una serie di spettri di diverse intensità, aventi tutti il violetto per indentro ed il rosso per infuori, ma il rosso del secondo spettro (il primo della serie) si sovrappone un poco al violetto del terzo, il rosso di questo ancor più sul violetto del quarto, e così successivamente, in maniera che gli spettri precedenti vanno sempre più mordendo i susseguenti.

In quelli, di questi spettri, che sono bastantemente estesi e luminosi si scorgono distintamente le linee caratteristiche, che Fraunhofer ha trovate nello spettro per rifrazione, e che ha designate colle lettere *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*.

Prendendo col teodolite le misure delle distanze, o deviazioni angolari dal mezzo dell' immagine della fenditura, ad una qualunque di queste linee negli spettri successivi, per esempio la *D*, Fraunhofer ha trovato costantemente che la deviazione nel secondo è doppia di quella nel primo, nel terzo tripla, nel quarto quadrupla ec., dal che ne segue che anche la distanza fra due delle linee omologhe nel secondo spettro deve essere doppia della distanza delle stesse linee nel primo, tripla nel terzo ec., od in generale che l' estensione del secondo spettro deve essere doppia di quella del primo, quella del terzo tripla ec.

La tavola seguente contiene la deviazione di tutte o d' alcune delle linee caratteristiche del primo spettro, pei diversi reticoli, dalle quali si potranno dedurre le deviazioni delle linee omologhe degli spettri seguenti prendendone i multipli successivi. Nella seconda colonna i valori di τ rappresentano, in millimetri, l' intervallo trasparente del retticolo usato nell' esperimento, ω l' intervallo opaco, e σ la somma di questi due intervalli.

Numero del reticolo	INTERVALLI trasparenti e opachi dei reticoli	DEVIAZIONI DELLE VARIE LINEE CARATTERISTICHE NEL 1.° SPETTRO							ANNOTAZIONI
		linea *B*	linea *C*	linea *D*	linea *E*	linea *F*	linea *G*	linea *H*	
1.°	$\tau = 0,017000$ $\omega = 0,036111$ $\sigma = 0,053111$	44'.45"	42'.42"	38'.19"	34'.14"	31'.34"	27'.56"	25'.44"	
2.°	$\tau = 0,030102$ $\omega = 0,049186$ $\sigma = 0,079288$	29'.50"	28'.28"	25'.33"	22'.51"	21'.4"	18'.38"	17'.11'	
3.°	$\tau = 0,026312$ $\omega = 0,053165$ $\sigma = 0,079477$	—	28'.24"	25'.29"	22'.24"	20'.56"	18'.30'	16'.59"	
4.°	$\tau = 0,014862$ $\omega = 0,090927$ $\sigma = 0,105789$	22'.22"	21'.20"	19'.10"	17'.8"	15'.47"	13'.57"	12.'49"	Gli spettri sono poco visibili negli spazi corrispondenti ad *E*' *E*''.
5.°	$\tau = 0,104550$ $\omega = 0,054708$ $\sigma = 0,159258$	—	14'.10"	12'.42"	11'.19"	10'.26"	9'.13"	8'.18"	Il terzo spettro presso che nullo.
6.°	$\tau = 0,023044$ $\omega = 0,187970$ $\sigma = 0,211014$	—	10'.41"	9'.35"	8'.34"	7'.52"	7'.1"	6'.24"	Il settimo spettro poco visibile.
7.°	$\tau = 0,155490$ $\omega = 0,163110$ $\sigma = 0,318600$	—	—	6'.21"	5'.40"	5'.13"	—	—	Il secondo spettro quasi nullo.
8.°	$\tau = 0,385910$ $\omega = 0,080304$ $\sigma = 0,466214$	—	—	4 .15	—	—	—	—	Il quinto ed il sesto spettro quasi invisibile.
9.°	$\tau = 0,364630$ $\omega = 0,189460$ $\sigma = 0,554090$	—	—	3 .28	—	—	—	—	Il terzo spettro quasi nullo.
10.°	$\tau = 0,077907$ $\omega = 0,608700$ $\sigma = 0,686607$	—	—	2 .57	—	—	—	—	Il nono spettro pare mancare.

Dall'esame di questa tavola appaiono due proprietà rimarchevoli.

1.° La deviazione degli stessi colori, o più esattamente delle stesse linee B, C, D, E, F, G, H dipende, non dal solo intervallo trasparente τ, nè dal solo intervallo opaco ω, ma dalla loro somma σ: così negli spettri dei reicoli designati 2 e 3, in cui questa somma è quasi eguale, la deviazione è pure quasi la stessa.

2.° La deviazione di una delle dette linee è tanto maggiore in un reticolo quanto la somma σ dei due intervalli trasparente ed opaco è minore. Così negli sperimenti indicati nella tavola dai numeri della prima delle due linee seguenti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	3	4	6	8	12	18	21	25

le somme degli intervalli dei retticoli aumentando all'incirca come i numeri della seconda linea, le deviazioni della linea D, per esempio, diminuiscono nella proporzione degli stessi numeri.

Valutando dunque la deviazione proporzionalmente al suo seno, poichè gli angoli sono sempre piccoli, il prodotto della deviazione per la somma degli intervalli deve fare una quantità costante, dal che si deve avere l'equazione

$$\sigma \sin \delta = \lambda$$

in cui λ dinota la costante che appartiene alla linea corrispondente alla deviazione δ.

Se si fanno questi prodotti per le sette linee, di cui le deviazioni sono espresse nella tavola, si trova:

Lettere indicanti le linee caratteristiche	Prodotti delle deviazioni per la somma degli intervalli del reticolo
B	0mm,000688
C	0, 000656
D	0, 000589
E	0, 000526
F	0, 000484
G	0, 000429
H	0, 000393

La coincidenza che nasce dal confronto dei valori di questi prodotti con quelli della tavola data all'articolo 5 della Lezione

XXVIII, che esprimono le lunghezze delle ondulazioni dei colori dello spettro, in cui le suddette linee sono comprese, si rende evidente, e dà la chiave per aprirci la via alla spiegazione meccanica del fenomeno che esaminiamo.

11. Il modo più semplice d'intendere la formazione di questi spettri ci pare quello di dedurlo dal celebre esperimento di Fresnel, sulle frange fatte dalle due immagini di un filo di luce riflesso da due specchi poco inclinati fra loro, che abbiamo descritto nella precedente Lezione.

Consideriamo da prima soltanto due fessure o due intervalli trasparenti del reticolo, e supponiamo che sopra di esse non venga a cadere che una luce d'eguale refrangibilità e colore, per esempio, *violetta*. Le luci che passano da questi due intervalli luminosi potranno essere paragonate ai due fili luminosi riflessi dagli specchi nell'esperimento citato. Le onde che si propagheranno da queste fenditure produrranno gli stessi accidenti delle onde segnate $O_1 O_1$, $O_2 O_2$, $U_1 U_1$, $U_2 U_2$ nella figura 41, e daranno origine a delle frange luminose, che saranno distanti dal mezzo dell'immagine della fenditura di quantità, che, come abbiamo mostrato all'articolo 5 della Lezione XXVIII, saranno prossimamente dei multipli di quella espresssa da

$$(1) \qquad d = l \frac{E B}{A B},$$

supponendo che $A B$ sia in questo caso la distanza fra le linee di mezzo dei due intervalli luminosi, ed $E B$ la distanza del fuoco del telescopio del teodolite dal piano del reticolo, posto perpendicolarmente all'asse dello stesso telescopio.

Le aperture dei reticoli nell'esperimento che trattiamo essendo estremamente sottili, la luce trasmessa da ciascuna di esse sarà assai minore che nell'esperimento di Fresnel; per lo contrario la piccolezza degli intervalli fra le aperture rendendo il rapporto $E B : A B$ molto maggiore, d sarà sensibilmente più grande, e le frange risulteranno molto più dilatate. Se quindi non si avessero che due aperture, la poca luce trasmessa, venendo diffusa in più larghi spazi, darebbe delle frange pallide e poco sensibili. Ma la circostanza che, in luogo di due sole aperture, il reticolo contiene un gran numero di esse, produce due effetti favorevoli alla produzione degli spettri. Primieramente ciascuna coppia successiva di aperture produce un nuovo sistema di frange, e questi sistemi, ponendosi gli uni accanto degli altri, formano col loro concorso delle bande lar-

ghe quanto è la larghezza della porzione illuminata del reticolo,e nelle quali la luce è assai sensibile; in secondo luogo gli stessi sistemi sovrapponendosi fuori di queste bande con differenza di fase interferiscono l'un l'altro, e causano a piccola distanza da esse una distruzione quasi completa di luce. Ci possiamo convincere della realtà di questi due effetti ripetendo dei ragionamenti analoghi a quelli usati nell'articolo 2 della Lezione XXVII, per dimostrare la propagazione di un raggio di luce in linea retta. Impiegando dunque, come abbiamo supposto, una luce omogenea per illuminare il reticolo, dovranno scorgersi a delle distanze fra loro, date dal valore di d della precedente formola (1), delle bande strette del colore della luce impiegata, separate da larghi intervalli oscuri.

Non sia più la luce d'eguale colore e refrangibilità, ma vada diminuendo di refrangibilità e variando di colore, come la luce naturale che compone lo spettro di rifrazione. Il valore di l, nell'equazione precedente (1), aumenterà per gradi, le bande dei respettivi colori si allontaneranno successivamente dall'asse; a lato delle bande luminose violette verranno a porsi delle bande luminose di color d'Indaco, poi delle bande azzurre, poi delle verdi e così progressivamente, le quali si sovrapporranno in parte, come appunto succede negli spettri fatti colla rifrazione; e dall'addossamento di tutte queste bande, nasceranno altrettanti spettri, quante erano prima le bande di color violetto.

È facile il vedere, che se si indica con $1+\nu$ il rapporto della lunghezza delle onde del color rosso estremo alla lunghezza delle onde di color violetto, e con ρ il rapporto $EB : AB$, i confini interni dei raggi violetti dei successivi spettri saranno dati dai termini della serie (1)

$$l\rho \;,\; 2l\rho \;,\; 3l\rho \;,\; 4l\rho, \text{ ec.};$$

ed i confini esterni dei raggi rossi dai termini della serie

$$(1+\nu)\,l\rho \;;\; 2\,(1+\nu)\,l\rho \;;\; 3\,(1+\nu)\,l\rho \;;\; 4\,(1+\nu)\,l\rho \text{; ec.}$$

Le differenze dei termini corrispondenti delle due serie saranno le lunghezze dei respettivi spettri, che verranno per conseguenza date da

$$\nu l\rho \;;\; 2\nu l\rho \;;\; 3\nu l\rho \;;\; 4\nu l\rho; \text{ ec.}$$

(1) In queste espressioni abbiamo trascurato la metà della larghezza delle bande colorate, eguale alla metà della larghezza delle parti illuminate del reticolo, come piccola, e che ci avrebbe complicato le formole senza utilità pel nostro oggetto.

Considerando due termini successivi, corrispondenti in ciascuna delle due serie superiori, sottraendo il termine seguente della prima serie dal termine precedente della seconda, e dividendo la differenza per la lunghezza dello spettro precedente, si avranno le parti di questo spettro, che sono sovrapposte al successivo espresse da

$$\frac{\nu - 1}{\nu}\ ,\quad \frac{2\nu - 1}{2\nu}\ ,\quad \frac{3\nu - 1}{3\nu}\ ,\quad \frac{4\nu - 1}{4\nu}\ ,\quad \text{ec.}$$

Se si prende $\frac{2}{3}$ pel valore di ν, si hanno i valori dei termini di questa serie che sono

$$-\tfrac{1}{2},\quad \tfrac{1}{4},\quad \tfrac{1}{2},\quad \tfrac{5}{8},\quad \text{ec.}$$

Il primo termine, essendo negativo, ci dice che non vi è sovrapposizione, e che per lo contrario il confine rosso del primo spettro resta, per metà della sua larghezza, indietro al confine violetto del secondo spettro, l'intervallo fra essi rimanendo oscuro. I termini seguenti c' indicano per ordine le parti di cui si trovano sovrapposti due spettri successivi.

12. Fraunhofer ha osservato, rispetto ad alcuni reticoli, che nella serie degli spettri successivi, se ne trova qualcuno mancante. Se si esamina la tavola precedente per vedere quali sono i reticoli pei quali quest'accidente succede, si scorge che ciò avviene quando l'intervallo trasparente è eguale, od è un multiplo o submultiplo presso che esatto dell'intervallo opaco. Così nel reticolo n.° 7, dove l'intervallo trasparente è quasi eguale all'opaco, manca il secondo spettro; nei reticoli n.^{i} 5 e 9, dove l'intervallo trasparente è doppio di quello opaco, manca il terzo spettro; nel reticolo n.° 8, dove lo spazio trasparente è fra quattro e cinque volte maggiore dell'opaco, mancano il quinto e il sesto spettro, e così di seguito.

Per mezzo di quest' avvertenza, e della riflessione che, a misura che si considerano le frange più lontane dalla perpendicolare, elevata sul mezzo della parte illuminata del reticolo, possono pervenire ad esse dagli intervalli fra i fili del reticolo dei raggi che interferiscano fra loro, si scuopre la causa della mancanza degli spettri ne' casi menzionati.

Per quest' oggetto premetteremo che, se un' apertura è di tale grandezza che i raggi *a I*, *b I* (Fig. 50), che passano per gli orli e giungono con sensibile obliquità al punto *I*, non differiscono in lunghezza più di una mezza ondulazione, tutti i raggi intermedi concorreranno, secondo i principj che abbiamo esposti trattando della diffrazione, ad aumentare l'effetto luminoso. Ma se l'apertura è di maggiore larghezza (1) talchè i raggi estremi che ra-

(1) Lez. XXVIII, art. 10.

dono i due orli differiscano di più di una mezza ondulazione, alcuni dei raggi intermedi, inviati al punto I, cominceranno ad interferire, e quando la grandezza dell' apertura giunga a tanto che i raggi estremi differiscano di un' intera ondulazione, l' interferenza di una metà dei raggi intermedi coll' altra metà sarà completa, e cesserà ogni luce. Crescendo tuttavia l'apertura, riapparirà la luce, che anderà aumentando d' intensità sino a tanto che la differenza di cammino dei raggi estremi arrivi alla lunghezza di tre mezze ondulazioni, poi diminuirà di nuovo, e l' intensità della luce tornerà nulla giungendo la differenza di cammino ad eguagliare due ondulazioni; e così di seguito.

Ciò posto esaminiamo, per esempio, il caso del reticolo n.° 5: dinotando con l la lunghezza media delle ondulazioni componenti la luce naturale, il primo spettro succederà, ad un dipresso, in un punto I_1 dove $I_1 m' - I_1 m = l$; il secondo dove $I_2 m' - I_2 m = 2\,l$; ed il terzo dove $I_3 m' - I_3 m = 3\,l$, e così successivamente. Ora la distanza $m' m = \sigma_1$ dei centri di due aperture successive del reticolo, dando nei cammini $I_1 m'$ ed $I_1 m$ una differenza dell' intera lunghezza di un'onda, la larghezza $a\,b$ ovvero $a' b'$ di un' apertura, dinotata da $\tau = \frac{2}{3}\sigma$, darà pei raggi estremi che l' attraversano una differenza di cammino $= \frac{2}{3}l$, ossia eguale ad $\frac{1}{2}\,l + \frac{1}{6}\,l$; così questi raggi differiranno di più di una mezza ondulazione ed $\frac{1}{4}$ della luce proveniente dalle aperture $a\,b$ od $a' b'$ interferirà con se stessa, ed il primo spettro avrà minor vivezza che se le aperture fossero di $\frac{1}{4}$ più strette. Passiamo al secondo spettro; la distanza $m\,m'$ dando una differenza di cammino $I_2 m' - I_2 m = 2\,l$, la distanza $a\,b$, ovvero $a' b'$ darà nei raggi estremi che lambiscono gli orli delle aperture una differenza di cammino $= \frac{4}{3}\,l = l + \frac{1}{3}\,l$. Nella luce che proviene da ciascuna delle aperture $a\,b$ ed $a' b'$ succederà dunque un'interferenza di una intera ondulazione che distruggerà $\frac{3}{4}$ della stessa luce, e non rimarrà a produrre lo spettro che $\frac{1}{4}$ della luce inviata da ciascuna apertura. Finalmente, rispetto al terzo spettro, avremo $I_3 m' - I_3 m = 3\,l$, $I_3 a - I_3 b = 2\,l$, come pure $I_3 a' - I_3 b' = 2\,l$, ed i raggi estremi di ciascuna apertura, differendo di due intere ondulazioni, la luce che passa per ciascuna di esse interferirà completamente, nè vi sarà più produzione di spettro nel luogo I_3.

Generalizzando questo ragionamento si vedrà che, tutte le volte che sarà $\frac{i\,\tau}{\sigma} = n$, n risultando un numero intero, lo spettro dell' ordine i verrà a mancare, come mostrò l' esperienza.

LEZIONE XXX.

Della doppia rifrazione nei cristalli ad un solo asse ottico.

1. La teorica della rifrazione semplice, che abbiamo esposto nelle Lezioni precedenti, appartiene ai mezzi rifrangenti, ne' quali le vibrazioni si propagano colla stessa velocità in tutte le direzioni, caso che si presenta più comunemente. Infatti questa proprietà ha luogo nei gas, in molti liquidi, nel vetro comune, nei cristalli naturali che hanno per forma primitiva un cubo od un ottaedro regolare, od in generale appartenenti al sistema cristallografico detto *regolare*, nel quale si può quindi credere che l'*etere* conservi una stessa legge nelle alternative d'elasticità e densità secondo tutte le direzioni. Ma tale proprietà non è generale. Abbiamo più volte ripetuto, che lo studio dei fenomeni ci porta a credere, che, nei corpi, le molecole si tengano assieme in virtù di una atmosfera eterea, che ciascuna di esse forma intorno a se, e con cui combinando la sua azione viene ad esercitare delle forze d'attrazione o repulsione sulle altre, secondo la loro maggiore o minore distanza. La figura di queste molecole deve determinare lungo i loro spigoli e nelle vicinanze dei loro angoli solidi (1) dei gradi differenti di densità nella distribuzione dell'etere delle loro atmosfere. Nei corpi cristallizzati, essendo le molecole tutte eguali e simmetricamente disposte con un dato ordine, devono risultare delle alternative di densità e forza elastica dell'etere che seguiranno una legge diversa nelle diverse direzioni, e quindi, per un effetto analogo a quello con cui abbiamo spiegato la dispersione (1), anche le vibrazioni luminose devono propagarsi nelle varie direzioni con velocità differenti. Questa conclusione è confermata dall'esperienza. Nei cristalli che hanno per forma primitiva dei poliedri in cui non esiste che un solo asse di figura o linea intorno alla quale la figura è disposta simmetricamente, come il romboide, l'ottaedro a basi quadrate, il parallelepipedo rettangolo a base quadrata, in generale in quelli che appartengono al sistema tetragonale od esagonale, un raggio di luce, penetrando in essi, si divide in due, de' quali uno segue la legge della rifrazione semplice, l'altro una legge differente. Se la forma primitiva dei cristalli è un poliedro che non ammetta neppure un asse o linea, intorno alla

(1) Lez. XII, art. 8.

quale tutto sia simmetricamente disposto, il raggio di luce si divide pure comunemente in due, che seguono delle leggi tuttavia più composte.

Procurerò di dare in questa e nella seguente Lezione una idea generale del modo con cui questi fenomeni della doppia rifrazione si producono, senza entrare nei varii particolari che esse presentano, e farò conoscere le costruzioni che Huyghens e Fresnel hanno dato per determinare in ogni caso il cammino dei raggi rifratti.

2. I mineralogisti conoscono un cristallo sotto il nome di *spato d'Islanda*, o carbonato di calce, del quale s'incontrano dei pezzi anche di gran mole. Esso consta di 56 centesime parti di calce e 44 d'acido carbonico; il suo peso specifico è di 2,714. Questo cristallo è trasparente e senza colore; cristallizza in forma di romboide, le cui sei facce sono dei rombi a lati eguali cogli angoli ottusi di 105°.5, e perciò cogli acuti di 74°.55. Degli angoli solidi opposti, due (Fig. 51) A e B sono formati da tre angoli piani ottusi eguali, gli altri sei sono composti di due angoli piani acuti ed uno ottuso. La retta $A\,B$ che congiunge i due angoli ottusi si chiama *l'asse ottico del cristallo;* questa è egualmente inclinata sulle tre facce, e tutto è simmetricamente disposto intorno ad essa. Come ogni pezzo di spato d'Islanda può dividersi in altri di forma simile, ed anzi il cristallo si presta facilmente a queste divisioni, perchè si spacca facilmente secondo piani paralleli alle faccie, così ogni punto del cristallo può divenire il vertice di uno degli angoli solidi ottusi. Per ogni punto del cristallo si può dunque supporre che esista un asse, che non sarebbe altro che la direzione della retta che unirebbe questo punto con quello posto al vertice del secondo angolo ottuso, qualora dall'intero cristallo si tagliasse fuori un pezzo di grandezza qualunque, ma di forma perfetta.

Per comodità degli esperimenti giova spesso lavorare apposta il cristallo in modo che presenti delle facce artificiali, perpendicolari, parallele, o con date inclinazioni all'asse ottico del cristallo, secondo le circostanze.

3. Supponiamo d'aver lavorato un pezzo di spato d'Islanda in forma di un cubo, o di un parallelepipedo rettangolo, con due delle sue facce opposte perpendicolari all'asse, e le altre quattro parallele, e cominciamo ad esaminare i fenomeni di rifrazione, nei casi più semplici, di un pezzo di cristallo così tagliato.

Quando si fa cadere sopra una qualunque delle dette facce un

raggio di luce sotto l'incidenza perpendicolare, esso passa sempre, in apparenza, unico, ma in realtà si compone di due. Per convincersene basta inclinare leggermente il raggio sulla faccia del cristallo, che tosto si scorgono apparire due raggi, ciascuno d'una intensità eguale ad un mezzo di quella del raggio incidente, i quali attraversano il cristallo ed escono dalla faccia opposta. Una differenza poi notevole si osserva nella seconda legge di rifrazione di uno di questi raggi passando dal caso in cui il piano d'incidenza e rifrazione è perpendicolare all'asse ottico, a quello in cui è parallelo.

Rifrazione nel piano perpendicolare all' asse ottico.

4. Se il raggio incidente cade con obliquità su d'una faccia del cristallo parallela all'asse ottico, ed in un piano perpendicolare allo stesso asse, questo raggio di luce naturale si divide bensì in due, ma i raggi componenti seguono amendue le stesse leggi della rifrazione semplice. Ciascuno di essi si trova ancora nel piano d'incidenza, ciascuno fa un angolo di rifrazione, il cui seno conserva col seno dell'angolo d'incidenza una ragione costante, qualunque sia l'inclinazione del raggio incidente. La sola differenza si è, che, per uno dei raggi rifratti questa ragione è maggiore, per l'altro è minore. Ora abbiamo visto, dimostrando la legge della rifrazione semplice (1), che l'essere un raggio di luce più o meno rifratto dipende dal trovarsi più o meno diminuita la sua velocità di propagazione nel mezzo rifrangente, dunque, dalla divisione del raggio incidente in due, dobbiamo inferire che non tutta la sua luce soffre nel cristallo un egual ritardo di velocità di propagazione. La porzione di luce, che compone il raggio meno rifratto, si propaga con una velocità maggiore, o sia ha diminuito meno la sua velocità di propagazione, entrando nel cristallo, e la porzione di luce componente il raggio più rifratto si propaga con una velocità minore, od ha perduto un grado maggiore di velocità di propagazione.

Aumentando successivamente l'angolo sotto cui il raggio incidente incontra la faccia del cristallo, i due raggi in cui si suddivide si avvicinano fra loro, ma continuano a rifrangersi conservando la legge del rapporto costante fra il seno dell'angolo d'incidenza ed il rispettivo seno dell'angolo di rifrazione, cioè mo-

(1) Lez. XXVII, art. 5.

strando una differenza costante di velocità, così, benchè pel continuo avvicinarsi, vengano a confondersi in un solo, quando il raggio incidente diviene perpendicolare alla faccia del cristallo, ragion vuole che anche a questo limite le loro velocità di propagazione abbiano conservato la stessa differenza fra loro.

Può sorprendere come due porzioni di luce che attraversano un cristallo nella stessa direzione possano avere velocità diverse di propagazione. Ma se si riflette a ciò che abbiamo detto altrove (1), che le vibrazioni degli atomi si fanno in una direzione perpendicolare a quella della loro propagazione, basterà immaginare che le vibrazioni di un raggio si facciano per esempio nella direzione parallela all'asse ottico, e quelle dell'altro nella direzione perpendicolare, per capire che, essendo le forze acceleratrici che tendono a ricondurre gli atomi alla loro situazione d'equilibrio diverse nelle due direzioni, per la costituzione propria del cristallo (2), anche le velocità di propagazione, perpendicolari a queste direzioni, potranno risultare diverse. I fatti che studieremo in altre Lezioni confermeranno e porranno in chiaro questo modo di concepire il fenomeno.

5. Si può assegnare facilmente la direzione di ciascuno dei due raggi rifratti, quando si conoscano i rapporti delle rispettive velocità di propagazione alla velocità di propagazione del raggio incidente, colla seguente costruzione, che è una conseguenza diretta di quella che abbiamo fatto (3) per dimostrare le leggi della rifrazione semplice. Rappresenti SS', (Fig. 52), la sezione della superficie rifrangente del cristallo col piano d'incidenza, IL la velocità della luce nel mezzo incidente, che prenderemo per unità, e perciò sia $IL = 1$, sia $IM = a$ la velocità di propagazione del raggio più rifratto, ed $IN = b$ la velocità di propagazione del raggio meno rifratto: coi raggi IM ed IN descrivansi due circoli, e poi condotta IR perpendicolare al raggio incidente IL, così che IR sia il profilo del piano dell'inviluppante che rappresenta la superficie dell'onda del raggio incidente, pongasi nell'angolo SIR la retta TR eguale e parallela ad IL, presa per unità di lunghezza. Dal punto T conducansi le tangenti TO, TE; ed uniscansi i punti O ed E, dove queste tangenti toccano i rispettivi cerchi, col punto d'incidenza I: le rette IO, ed IE saranno le direzioni dei raggi rifratti.

(1) Lez. XXVI, art. 6.
(2) Art. 1.
(3) Lez. XXVII, art. 5.

Infatti osservando che nei triangoli rettangoli IRT, IOT, IET, gli angoli in I equivalgono rispettivamente all'angolo d'incidenza, i, ed ai due angoli di rifrazione, r, ed r', si avrà per ragione dell'ipotenusa comune TI,

$$\sin i = \frac{TR}{IT} = \frac{1}{IT}; \ \sin r = \frac{IO}{IT} = \frac{a}{IT}; \ \sin r' = \frac{IE}{IT} = \frac{b}{IT};$$

e quindi

$$\sin i = \frac{1}{a} \sin r \quad , \quad \sin i = \frac{1}{b} \sin r';$$

come deve essere secondo la legge della rifrazione semplice. I coefficienti $\frac{1}{a}$, ed $\frac{1}{b}$ corrispondono agli indici di rifrazione, e potranno determinarsi sperimentalmente per ciascun cristallo con osservazioni dirette nello stesso modo che si determina l'indice di rifrazione delle sostanze unifrangenti, il che ci darà il valore delle due costanti necessarie a conoscersi per la teoria della doppia rifrazione dei cristalli ad un solo asse ottico.

Per lo spato d'Islanda, Malus ha trovato i valori

$$\frac{1}{a} = 1{,}6543 \quad ; \quad \frac{1}{b} = 1{,}4833$$

e quindi si ha

$$a = 0{,}6045 \qquad b = 0{,}6742.$$

Pel quarzo o cristal di rocca, lo stesso Ottico ha ottenuto

$$\frac{1}{a} = 1{,}5484 \quad ; \quad \frac{1}{b} = 1{,}5582$$

e perciò risulta

$$a = 0{,}6458 \qquad b = 0{,}6418.$$

Rifrazione in una sezione principale.

6. Si chiama *sezione principale* del cristallo ogni sezione del cristallo che può immaginarsi fatta da un piano condotto parallelamente all'asse, e perpendicolarmente ad una faccia qualunque naturale od artificiale del cristallo medesimo.

Cada primieramente un raggio di luce naturale su di una faccia del cristallo parallela all'asse ottico, di modo che la linea d'intersezione del piano d'incidenza colla stessa faccia possa consi-

derarsi coincidere coll'asse stesso. Il raggio incidente penetrando nel cristallo si divide in due raggi rifratti, che amendue rimangono, come precedentemente, nel piano d'incidenza, e perciò sotto a quest'aspetto si conducono colla prima legge della rifrazione semplice; ma per uno solo di essi, si verifica la seconda legge, cioè si conserva costante la ragione del seno dell'angolo d'incidenza al seno dell'angolo di rifrazione; per l'altro questa ragione è variabile. Sia il piano della figura 53 quello della sezione principale che si considera, SS' rappresenti la faccia del cristallo in profilo, I il punto d'incidenza, $IL = 1$, la velocità di propagazione nel mezzo incidente, $IM = a$ la velocità di propagazione del primo raggio, ed $IN = b$ quella del secondo. Colla velocità IM, come raggio, descrivasi il circolo MO, e colle velocità IN ed IM, come semiassi descrivasi la semiellisse NEM. Sia IR perpendicolare ad IL, e situato nel piano d'incidenza; posta TR eguale e parallela ad IL, dal punto T conducasi TO tangente al circolo, e TE tangente all'ellisse: i due punti O ed E, congiunti col punto d'incidenza I, daranno le direzioni dei due raggi rifratti IO, ed IE, il primo dei quali si chiama il raggio *ordinario*, perchè soffre una rifrazione colla legge ordinaria, ed il secondo *straordinario*, perchè, come è chiaro, la sua rifrazione segue una legge differente dall'ordinaria. Si vede che questa costruzione è del tutto simile alla precedente, art. 5, sostituendo la semiellisse ad uno dei semicircoli.

7. Una costruzione analoga a quella che ora abbiamo fatto serve a dare la direzione dei due raggi anche nel caso che la faccia incidente del cristallo non sia parallela all'asse, ma sia inclinata, come nella figura 54, nella quale SS' indica il profilo della sezione della faccia del cristallo, ed IM la direzione dell'asse ottico nel piano d'incidenza. Descritta, come precedentemente, la semicirconferenza $M'MO$, e la semiellisse NEM, i semiassi della quale siano ancora $IM = a$ ed $IN = b$, e determinato sopra SS' il punto T in modo che risulti TR uguale e parallela ad IL; le tangenti TO, TE condotte da T alla semicirconferenza ed alla semiellisse determinano due punti, che si trovano, il primo sopra il raggio ordinario IO, ed il secondo sopra il raggio straordinario IE.

8. Se la faccia incidente venisse ad essere perpendicolare all'asse ottico, il piano d'incidenza essendo sempre una sezione principale, la costruzione sarebbe rappresentata dal tipo della figura 55. In questo caso, quando il raggio incidente fosse perpendicolare

alla faccia, i due raggi rifratti che verrebbero a confondersi, avrebbero anche una stessa velocità di propagazione, ma essi rimarrebbero ancora distinti, e differirebbero per la proprietà che abbiamo accennata alla fine dell'articolo 4, e che studieremo in seguito.

Teorica.

9. Per rendersi ragione del modo con cui un raggio di luce, penetrando, parallelamente ad una sezione principale, in un cristallo dotato di un asse ottico si divide in due, uno dei quali non segue più la legge della ragione costante fra il seno dell'angolo d'incidenza ed il seno dell'angolo di rifrazione, non si ha che a supporre che un tremito eccitato nell'etere di un punto del cristallo si scomponga, analogamente a ciò che è stato detto nell'articolo 4, in due tremiti perpendicolari fra loro, dei quali, uno si propaghi per avanti secondo una superficie fluente sferica, e l'altro secondo una superficie fluente della forma di un ellissoide di rivoluzione, il cui asse polare sia parallelo all'asse ottico del cristallo.

Sia *IikL*, Fig. 56, un fascetto di luce di cui la sezione *Ih* perpendicolare ad *IL* rappresenta in profilo il piano della superficie dell'onda luminosa, o dell'inviluppante all'atto di cominciare ad entrare nel cristallo. All'arrivo di ogni punto di questa inviluppante sulla superficie *Ii* del cristallo si genereranno, secondo abbiamo premesso, due tremiti in due direzioni diverse e perpendicolari fra loro: quelli nella prima direzione si propagheranno secondo le superficie sferiche *AOMB*, *aomb* ec. e quelli nella seconda direzione secondo le superficie ellissoidali *CNEM*, *cnem* ec. delle quali le rette *IM*, *im* ec. parallele all'asse ottico saranno gli assi di rivoluzione. Tutte queste superficie saranno simili e similmente situate, ma saranno diverse di grandezza in proporzione del tempo scorso dopo l'istante in cui sono state generate, cosicchè, se immaginassimo continuate le loro tracce sino alla superficie del cristallo, esse s'intersecherebbero tutte rispettivamente secondo due rette *TO*, *TE* che saranno le loro tangenti comuni. Per trovare la direzione di queste tangenti osservo, che se il raggio *IM* della superficie sferica, ed i semiassi *IM* ed *IN* della superficie ellissoidale corrispondessero alle grandezze di queste superficie dopo che i tremiti rispettivi si sono propagati nell'unità di tempo, anche *TR*, perpendicolare ad *Ih* prolungata, e *IO* ed *IE* dovrebbero rappresentare rispetti-

vamente gli spazii, che percorrono nell' unità di tempo il raggio incidente, il raggio ordinario ed il raggio straordinario. Se dunque si pone nell' angolo $h I i$ una retta TR perpendicolare al prolungamento della $I h$, e di tale grandezza che sia $TR = IL = 1$, velocità di propagazione della luce nell' aria, e se dal punto T si conduce una retta TO tangente al circolo $AOMB$ descritto con un raggio eguale alla velocità a, ed un' altra TE tangente all' ellissoide descritta con dei semiassi eguali alle velocità a e b, queste due tangenti saranno le rette dimandate, sulle porzioni $O o$, $E e$ delle quali s' intersecheranno rispettivamente le due specie di superficie fluenti. Ora è appunto su queste sole porzioni d' inviluppanti che, (1), i tremiti recati dalle stesse superficie fluenti, possono produrre una luce sensibile.

L' inviluppante $O o$ si propagherà secondo $I O$, che sarà la direzione del raggio ordinario, e l' inviluppante $E e$ secondo $I E$, che sarà la direzione del raggio straordinario. Ed ecco con questa considerazione spiegata la costruzione che abbiamo dato di sopra.

10. Arrivati i due fascetti luminosi in O_1 ed E_1 sulla faccia $\Sigma\Sigma$ opposta e parallela ad SS, cominceranno ad uscire nell' aria. Il primo anderà poi agitando successivamente l' etere dell' aria, nei punti della sezione $O_1 o_1$, ed il secondo in quelli della sezione $E_1 e_1$. Tanto nei punti dell' una che dell' altra sezione si genereranno dei tremiti che si propagheranno tutti secondo delle superficie fluenti sferiche, con delle velocità $O_1 O_2$ ed $E_1 E_2$ eguali a quella colla quale si propaga la luce nell' aria. Le superficie corrispondenti ai primi tremiti s' intersecheranno secondo una retta $T_1 o_2 O_2$, e quelle corrispondenti ai secondi tremiti, lungo una retta $T_1 e_2 E_2$, che si otterranno, per le stesse ragioni addotte sopra, ponendo rispettivamente negli angoli $R_1 O_1 o_1 = ITO$ ed $R_1 E_1 e_1 = ITE$ le rette $T' R' = IO$, e $T_1' R_1' = IE$, e conducendo dai punti T' e T_1' le tangenti $T_1 O_2$, $T_1' E_2$ ai cerchi $A_1 O_2 B_1$, $P E_2 Q$. In conseguenza di questa costruzione $O_1 O_2 o_2 o_1$, $E y e X$ rappresenterà il fascetto di luce rifratto ordinariamente all' uscire del cristallo, ed $E_1 E_2 e_2 e_1$ il fascetto di luce rifratto straordinariamente; e si vede che questi due fascetti saranno separati l' uno dall' altro, e daranno due immagini distinte del punto luminoso da cui è partito il raggio LI. Essi sono paralleli fra loro ed al raggio incidente nella supposizione che abbiamo fatto che le due facce d' incidenza e d' emergenza del cristallo siano parallele, ma non lo sarebbero più, come è fa-

(1) Ved. Lez. XXVI art. 4, e Lez. XXVII art. 5.

cile il verificarlo con una costruzione analoga, se le due facce del cristallo divergessero.

11. Non abbiamo considerato il raggio incidente che in un solo piano, che è quello della figura, tenendo così conto della sua larghezza ma non della sua grossezza. È però chiaro che se immaginiamo divisa la grossezza dei raggi da tanti piani vicini fra loro, quanto ci piace, per ciascuna falda compresa fra due piani si verificherà quanto abbiamo detto per una sola. Come gli atomi dell'etere, che si troveranno situati sulla faccia del cristallo, in una stessa perpendicolare al piano incidente, sono tutti agitati simultaneamente quando la superficie dell'onda rappresentata dall'inviluppante Ii viene a passar per essi, le superficie fluenti che si generano da ciascuno dei detti atomi si manterranno nel diffondersi sempre eguali fra loro, e le intersezioni delle medesime nella direzione della grossezza si troveranno tutte situate su delle linee rette parallele a quella passante per T, e perpendicolari al piano d'incidenza. Le inviluppanti Oo ed Ee non faranno dunque che acquistare una grossezza eguale a quella del fascetto incidente di luce, e staranno continuamente ne' piani tangenti condotti per una linea perpendicolare a TS e per la toccante TO, o TE. Il primo piano inviluppante TO si troverà nell'interno del cristallo, sempre perpendicolare alla linea IO, secondo cui si propaga, ma non così il secondo TE che si troverà inclinato alla sua linea di propagazione. Il fascetto ordinario avrà quindi nell'interno del cristallo le sezioni in cui gli atomi sono nella stessa fase di vibrazione perpendicolari alla direzione secondo cui cammina: il secondo fascetto straordinario, avrà invece le sezioni corrispondenti alla stessa fase dell'onda, in una situazione obliqua alla direzione secondo cui si propaga.

Rifrazione in una sezione qualunque.

12. Passiamo finalmente al caso generale in cui un raggio incidente cade sopra una faccia qualunque naturale od artificiale del cristallo, e con un angolo d'incidenza qualunque. Secondo le considerazioni esposte precedentemente sarà facile ad ognuno il riconoscere, in questo caso, la giustezza della costruzione seguente, per determinare la direzione tanto del raggio ordinario, che straordinario, costruzione che è stata data la prima volta da Huygbens, a cui si deve la scoperta di questa bella teorica della doppia rifrazione.

Pel punto I d'incidenza sulla superficie $S\,S$ del cristallo (Fig. 57), immaginiamo condotta una retta $I\,M = a$, parallela all'asse ottico, e con questa retta come raggio e col centro I descritta una sfera; poi colla stessa retta $I\,M = a$ come semiasse polare, e colla retta $I\,N = b$ come semiasse equatoriale, s'immagini descritto uno sferoide ellittico.

Ciò posto sia, nella figura 57 *bis*, $C\,C$ la sezione della faccia del cristallo colla sfera, ed $S\,S$ la sezione della stessa faccia collo sferoide ellittico. Sia $T\,U$ l'intersezione del piano d'incidenza colla faccia del cristallo, ed $I\,L$ la direzione del raggio incidente. Posto $I\,R$ nel piano d'incidenza e perpendicolare ad $I\,L$, si determini il punto T come precedentemente, cioè in modo che sia $T\,R = I\,L = 1$. Pel punto T, nel piano della faccia del cristallo, si conduca $P\,T\,Q$ perpendicolare a $T\,U$, e poi concepiscasi un piano che passi per $P\,Q$, e possa rotare intorno a questa retta come asse. Girando il piano in modo che diventi successivamente tangente nel punto O alla sfera, e nel punto E allo sferoide ellittico, si avranno due punti che congiunti con I daranno le direzioni delle rette $I\,O$ ed $I\,E$, che sono quelle dei due raggi rifratti. Il raggio nella direzione $I\,O$, che si mantiene nel piano d'incidenza, e conserva costante per tutte le inclinazioni la ragione del seno d'incidenza al seno di rifrazione, sarà il raggio ordinario; l'altro raggio secondo $I\,E$, che non osserva, comunemente, nessuna di queste due leggi, sarà il raggio straordinario.

È facile il vedere che tutti i casi percorsi precedentemente sono compresi in questa costruzione generale, e si deducono da essa dando alla faccia del cristallo ed al piano d'incidenza delle direzioni particolari. Si avvertirà soltanto che quando il raggio incidente è perpendicolare alla faccia del cristallo, il punto T è, come se fosse ad una distanza infinita, ed il piano tangente allora viene ad essere parallelo alla faccia del cristallo.

13. I geometri dimostrano (1) che se si chiama θ, l'angolo che la direzione di un raggio vettore qualunque dello sferoide ellittico fa col semiasse polare, e si dinota con a la lunghezza di questo semiasse, con b quella del semiasse equatoriale, e con r la lunghezza del raggio vettore $I\,E$, si ha

$$(a) \qquad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) \sin^2 \theta.$$

(1) Vedasi la Nota I.

Siccome r corrisponde alla velocità variabile del raggio luminoso straordinario, così si potrà con questa formola calcolare la detta velocità, quando si conosca l'angolo che la direzione del raggio fa col semiasse polare, senza ricorrere alla costruzione su esposta.

Se si avessero due raggi di luce che percorressero una stessa linea nel cristallo, uno come raggio ordinario, e l'altro come raggio straordinario, la velocità del primo sarà rappresentata da a, e quella del secondo da r, e la differenza dei quadrati inversi delle loro velocità di propagazione, dedotta dalla formola precedente venendo espressa da

$$(b) \qquad \frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} = \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) \sin^2\theta;$$

ciò ci mostra che questa differenza varia come il quadrato del seno dell'angolo, che la direzione comune dei due raggi fa coll'asse polare.

14. Tutti i cristalli che non hanno che un solo asse, cioè quelli nei quali uno dei raggi rifratti osserva le leggi della rifrazione semplice, presentano gli stessi fenomeni, che abbiamo esposti. La sola differenza in ciò consiste, che per alcuni la velocità di propagazione secondo l'asse polare, rappresentata da $IM = a$, è minore di quella nella direzione perpendicolare all'asse, rappresentata da $IN = b$, come nello spato d'Islanda, e come abbiamo supposto nelle figure 52 e seguenti; in altri invece, come nel cristallo di rocca, la velocità di propagazione nel verso dell'asse è maggiore che nel verso perpendicolare, e lo sferoide ellittico, invece d'essere schiacciato ai poli, è allungato. I primi si chiamano cristalli *repulsivi*, o *negativi*, perchè il raggio straordinario, IE, (Fig. 55) pare respinto dall'asse ottico IM, ed il secondo termine dell'equazione (a) è negativo; i secondi cristalli si dicono *attrattivi* o *positivi*, perchè il raggio straordinario, IE, si avvicina più del raggio ordinario IO all'asse ottico, e pare attratto da esso, ed il secondo termine dell'equazione (a) risulta positivo (1).

(1) Vedasi la Nota (II).

LEZIONE XXXI.

Doppia rifrazione nei cristalli con due assi ottici.

1. Allorchè i cristalli non contengono alcun' asse intorno al quale le figure delle molecole siano simmetriche, anche le alternative di minore e maggiore densità ed elasticità dell' etere, prodotte dalle atmosfere dalle quali le molecole sono circondate, seguono un ordine diverso in tutte le direzioni. Un fascetto di luce che si rifrange in questi cristalli si divide pure comunemente in due, ma le leggi del loro corso sono tuttavia più complicate e difficili a scoprirsi. Nulladimeno Fresnel, combinando i dati sperimentali con alcune considerazioni meccaniche assai ingegnose, quantunque non ancora dotate di tutto rigore, è riuscito a riconoscere la forma della superficie fluente secondo la quale i tremiti eccitati in un punto si propagano nei detti cristalli, e questa scoperta è uno dei più mirabili tratti del suo ingegno fra i tanti che ha dispiegato nel trattare questa bella parte della Fisica.

2. Egli assegnò in questi cristalli, che in ottica *con due assi* sono detti, tre assi ad angolo retto fra loro che chiamò *assi d'elasticità*, ed assunte tre elasticità costanti secondo questi assi, espresse nella ragione inversa del quadrato del semidiametro d'un ellissoide costrutto coi moduli di queste elasticità (1), come quadrati inversi dei semiassi, il modulo della forza elastica che anima un' atomo d' etere, quando oscilla nella direzione del detto semidiametro intorno alla sua posizione d' equilibrio stabile. Considerando la propagazione dell' etere in un cristallo così costituito trovò che i tremiti eccitati in un punto di esso si diffondono all' intorno di questo punto come centro secondo una superficie fluente data da un' equazione di quart' ordine, e che può considerarsi come composta di due falde che si riuniscono in quattro punti. Per farci un' idea di alcune tra le proprietà di questa superficie, necessarie al concepimento dei fenomeni che dobbiamo descrivere, immaginiamo che essa sia tagliata da tre piani passanti pel centro, e rispettivamente perpendicolari ai tre assi d'elasticità: le tracce della medesima sui piani di queste tre sezioni, che si chiamano *sezioni principali*, sarebbero rappresentate dalle figure 58, 59, 60.

Ciascuna di queste sezioni si compone di un cerchio e di una

(1) Lez. XX Nota II pag. 266.

ellisse; nella prima il raggio del cerchio è maggiore dei due semiassi dell'ellisse; nell'ultima viceversa è minore; nella sezione media, che è la più importante, il raggio del cerchio è intermedio fra i due assi. Queste curve sono tutte costrutte con tre sole linee che in ordine di grandezza sono i tre raggi dei cerchi: l'ellisse è in ciascuna sezione costrutta sui raggi dei cerchi delle altre due sezioni presi come semiassi.

I tre raggi dei cerchi rappresentano proporzionalmente le velocità di propagazione della luce in tre mezzi unirifrangenti omogenei, nei quali il rapporto della forza elastica alla densità fosse rispettivamente eguale a quella secondo cui verrebbe a propagarsi la luce lungo ciascuno dei tre assi, che Fresnel ha chiamato assi d'elasticità.

3. Ciò posto se si suppone che il cristallo sia stato preparato o tagliato in un parallepipedo o cubo colle sue facce a due a due perpendicolari ai tre assi d'elasticità, applicando per un raggio incidente compreso in ciascuna delle tre suddette sezioni la teorica che abbiamo esposto pei cristalli ad un solo asse ottico dedurremo:

1.° Che se il raggio cade perpendicolarmente su ciascuna delle sei facce del cristallo, esso passerà diritto, ed apparentemente indiviso, ma in realtà sarà composto di due con velocità di propagazione differente. Le due velocità di propagazione saranno una proporzionale al raggio del cerchio, e l'altra al semiasse dell'ellisse che si trova situato nella direzione del raggio luminoso.

2.° Se il raggio cade obliquamente su di una delle dette facce qualunque, ma parallelamente ad una sezione principale, esso si dividerà in due, l'uno de' quali seguirà la legge di Snellius, e l'altro quella di Huyghens, la cui direzione si otterrà collo stesso processo che abbiamo insegnato all'articolo 6 della Lezione precedente.

Quest'ultima proprietà offre il mezzo di determinare sperimentalmente i valori delle velocità di propagazione relative a ciascuno dei tre assi che sono necessarii per la costruzione delle precedenti figure, e di concepire a che queste velocità corrispondono nell'ottica. Perciò non si avrà che ad osservare il rapporto fra il seno dell'angolo d'incidenza ed il seno dell'angolo di rifrazione di quello, fra i due, che si rifrange ordinariamente in ciascuna sezione principale. Chiamando $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ questi rapporti, a, b, c, saranno le velocità di propagazione della luce corrispondenti a ciascuno dei tre mezzi, la cui elasticità corrispondesse rispettiva-

mente a quelle lungo i tre assi; la velocità di propagazione della luce nell'aria essendo presa per unità.

La difficoltà di questo modo di determinazione consiste nel sapere assegnare preventivamente la direzione dei tre assi d'elasticità in ciascun cristallo, onde conoscere la direzione da darsi al raggio incidente ed al piano delle facce. Le considerazioni cristallografiche, ed alcune proprietà ottiche, che impareremo in seguito, possono però somministrare dei dati per quest'oggetto.

Il Sig. Rudberg seguendo questo processo ha determinato con molta esattezza questi rapporti, per l'Aragonite e pel Topazzo chiaro che sono due cristalli a doppio asse ottico. Pei raggi di media rifrazione ha trovato.

	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{c}$
Aragonite	1,53264	1,68634	1,69082
Topazzo chiaro . .	1,61462	1,61668	1,62408 (1)

4. Quando il piano d'incidenza non fosse parallelo ad alcuna delle tre sezioni principali, o le facce non ne fossero perpendicolari, allora bisogna coi tre raggi a, b, c, saper tracciare la superficie fluente nella sua totalità, il che esige dei metodi geometrici o analitici più che elementari. (2) Supposta però tracciata questa superficie, il processo da seguirsi per trovare la linea di direzione del movimento dell'inviluppante del piano dell'onda è esattamente lo stesso di quello che abbiamo indicato pei cristalli ad un asse ottico. Posta nell'angolo fatto dalla direzione del raggio incidente colla faccia del cristallo una retta proporzionale alla velocità della luce nel mezzo incidente, si tirerà pell'estremo T fig. 71. di questa retta, e nella faccia del cristallo una perpendicolare al piano d'incidenza. Indi immaginando per questa perpendicolare condotto un piano si concepisca di farlo girare intorno ad essa fino a tanto che diventi tangente alla superficie fluente descritta col centro nel punto d'incidenza del raggio luminoso. Si troveranno comunemente due punti ai quali lo stesso piano può essere tangente, e congiunti questi due punti della superficie fluente col centro o punto d'incidenza, le due rette che li uniscono saranno le direzioni dei due raggi rifratti. Le ragioni di questa costruzione si riconosceranno facilmente considerando l'inviluppante formata dal-

(1) Vedi la Nota I.
(2) Vedi la Nota II.

l' intersezione di tutte le superficie fluenti generate nei diversi punti compresi nella grossezza del fascetto luminoso, e dimostrando che quest' inviluppante, che è la fronte dell'onda, giace nel piano su descritto, come si è fatto nella Lezione precedente, art. 9, esponendo la teorica della costruzione di Huyghens.

5. La costruzione generale che abbiamo indicato offre due casi speciali che furono notati la prima volta dal Sig. Hamilton, e verificati sperimentalmente dal Sig. Lloyd, amendue Professori all'Università di Dublino.

Questi due casi succedono quando i raggi luminosi nell'interno del cristallo sono situati nella sezione principale media; e vengono a percorrere delle linee parallele agli assi $C\,C$, $C'\,C'$ o vero $O\,O$, $O'\,O'$ (Fig. 61). Gli assi $C\,C$, $C'\,C'$ sono perpendicolari alle tangenti $T\,T'$, $S\,S'$, o vero $T\,S$, $T'\,S'$, le quali toccano contemporaneamente il cerchio e l'ellisse, e questi due assi si chiamano *gli assi di rifrazione conica.* Essi fanno coll'asse $A\,A'$ della più grande elasticità due angoli $C\,K\,A$, $C'\,K\,A$ eguali, e dei quali la tangente è espressa da $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{b^2-c^2}}$.

I secondi assi $O\,O$, $O'\,O'$ sono quelli che congiungono a due a due i punti d' intersezione del cerchio e dell'ellisse; ed è in questi quattro punti che le due falde della superficie fluente vengono a riunirsi. Questi assi si chiamano gli assi *ottici* del cristallo; essi fanno pure degli angoli eguali $O\,K\,A$, $O'\,K\,A$ da una parte e dall'altra dell'asse $A\,A'$ della più grande elasticità, i quali hanno per tangente $\dfrac{a\sqrt{b^2-c^2}}{c\sqrt{a^2-b^2}}$. (1)

6. Consideriamo i primi assi. Supponiamo, come nella Fig. 62, che $\Sigma\,\Sigma$ sia una faccia del cristallo perpendicolare all'asse conico $K\,C$ della figura 61, e $T\,T'$ il piano tangente che passa per $C\,c$ toccando la superficie fluente nei due punti C, c. Secondo la costruzione generale, un fascetto di luce perpendicolare a $\Sigma\,\Sigma$ si dividerebbe nei due raggi $K\,C$, $K\,c$ che hanno uno stesso piano tangente, e nell'escire dal cristallo tornerebbero a divenir paralleli, ma rimarrebbero separati. Ora il Sig. Hamilton ha fatto osservare che il piano tangente che passa per $C\,c$ non solo tocca la superficie fluente nei punti C, c, ma sì bene lungo la circonferenza di un cerchio il cui centro è sulla retta $C\,c$. Le superficie fluenti corri-

(1) Vedi la Nota II.

spondenti ai diversi punti della grossezza del fascetto s'intersecheranno quindi tutte secondo le circonferenze di cerchi eguali, ed il fascetto nell'interno del cristallo sembrerà scomporsi in un involto conico luminoso d'una grossezza eguale a quella del fascetto incidente, il che ha fatto dare all'asse *KC* il nome di asse conico.

All'uscire dalla faccia posteriore del cristallo i raggi componenti il cono torneranno tutti paralleli, e si avrà l'immagine di un anello illuminato, che non cambia di grandezza a qualunque distanza dal cristallo si osservi. Quest' apparenza è in fatti quella che il Sig. Lloyd ha osservato con un esperimento instituito nelle circostanze suddette.

7. Passiamo agli assi ottici. Il punto *O* (Fig. 63) dove il cerchio e l'ellisse della sezione principale media, si tagliano, non è soltanto un punto d'intersezione di queste due linee. Le due falde della superficie fluente, secondo abbiamo detto, si riuniscono in questo punto formando, come primo rilevò il Sig. Hamilton, un cuspide conoidico, del quale il detto punto *O* è il vertice. Attorno di questo vertice si possono condurre infiniti piani tangenti, e perciò ciascuno dei raggi componenti il fascetto di luce che si è propagato parallelamente all'asse ottico, al sortire del cristallo, rifrangendosi rispetto alle normali di tutti questi piani, verrà a formare una superficie conica, e dalle successive intersezioni di tutte le superficie appartenenti ai diversi raggi nascerà una specie d'involto conico luminoso. La luce componente quest'involto ricevuta su d'un piano perpendicolare all'asse ottico dipingerà un'immagine circolare con uno spazio oscuro nel mezzo, il quale comincerà a mostrarsi quando la distanza del piano dal cristallo sia tale che le dette superficie coniche abbiano acquistato un'apertura eguale alla grossezza del fascetto di luce, e che anderà sempre più aumentando di grandezza più si scosterà il piano dal cristallo.

8. Il Professor Lloyd ha confermato questa conclusione teorica con un esperimento. Egli fece cadere su di un pezzo di cristallo d'aragonite di una purezza e grandezza non ordinaria un fascetto di luce. Onde i raggi del fascetto attraversassero in maggior copia il cristallo lungo un asse ottico, li fece convergere verso di esso per mezzo di una lente con un'inclinazione presso che eguale a quella con cui avrebbero dovuto uscire, essendo una legge generale d'ottica, di cui è facile a concepire la ragione, che la luce che percorre un cammino con una velocità in una direzione segue esattamente il cammino inverso quando si propaga nella direzione opposta. Osservando questo fascetto di luce all'uscita del cristallo dalla faccia

opposta, attraverso un'apertura praticata in un diafragma, per escludere ogni luce straniera, vide infatti l'immagine presentare nel mezzo uno spazio oscuro circondato da un anello luminoso come è rappresentato nella Fig. 64. Ricevendo un fascetto emergente di luce solare, rifratto nello stesso modo, sopra una lastra di vetro appannato, vide che l'immagine andava aumentando di grandezza a misura che si allontanava la lastra dal cristallo rifrangente, ciò che provava la divergenza dei raggi.

Una teorica che ha fatto scoprire dei fatti così imprevisti e straordinari ha certamente in suo favore un grande argomento di verità, quantunque la parte meccanica su cui è stata fondata lasci ancora da desiderare qualche cosa dal lato del rigore.

9. Le dimostrazioni di varie altre proprietà, di cui gode la doppia rifrazione nei cristalli a due assi ottici, esigerebbero l'impiego di processi analitici, che il tenore di queste Lezioni non permette d'usare. Non possiamo però far a meno di far conoscere, come risultato di questi processi, un'importante relazione che esiste fra le velocità di propagazione di due raggi, che andassero per entro un cristallo lungo una stessa linea, od in direzioni parallele, della quale avremo a far uso nel seguito. Ogni linea di un cristallo birifrangente, od anche due linee parallele, possono essere percorse analogamente a ciò che abbiamo visto nell'articolo 4, con velocità diverse da due raggi che differiscano per la proprietà, di cui abbiamo fatto cenno nell'articolo 4 della precedente Lezione. Ora si dimostra, seguendo i principii di Fesnel, che il quadrato inverso delle velocità, v' e v, di propagazione di questi due raggi è dato rispettivamente dalle formole

$$\frac{1}{v'^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)\cos(\theta+\theta')$$

$$\frac{1}{v^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)\cos(\theta-\theta')$$

nelle quali a e c dinotano le velocità di propagazione dei raggi che seguirebbero la legge della rifrazione ordinaria nella prima e terza sezione principale, e θ e θ' gli angoli che la direzione comune dei due raggi fa cogli assi ottici posti, uno dall'una, l'altro dall'altra parte dell'asse di maggiore elasticità.

Sottraendo una dall'altra queste formole si ottiene

$$\frac{1}{v'^2}-\frac{1}{v^2}=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)\sin\theta\sin\theta'$$

la quale ci dice che la differenza dei quadrati inversi delle velocità di propagazione dei due raggi è eguale alla differenza dei quadrati inversi delle velocità rispettive, con cui si propagherebbero i raggi, che seguissero la legge della rifrazione ordinaria nelle due sezioni principali estreme, moltiplicate pel prodotto dei seni degli angoli che la direzione comune dei due raggi fa colle direzioni dei due assi ottici rappresentati dalle rette $O\,O$ ed $O'\,O'$ della Figura 61.

POLARIZZAZIONE DELLA LUCE

LEZIONE XXXII.

Dei principali fenomeni in cui la luce acquista lo stato di polarizzazione; caratteri della luce polarizzata.

1. La doppia rifrazione è così connessa colla modificazione della luce che i Fisici chiamano polarizzazione, che Huyghens studiando il primo fenomeno non potè a meno di osservare anche il secondo. Il fenomeno osservato da Huyghens è il seguente.

Abbiansi due romboidi o parallelepipedi di spato d'Islanda applicati uno sopra l'altro, o bene anche separati da un piccolo spazio; se la sezione principale dell'uno è parallela a quella dell'altro (Fig. 65), un raggio LI, che supporremo cadere con un'incidenza non molto grande, essendo diviso dal primo cristallo ne'due raggi, l'ordinario IO, e lo straordinario IS, ciascuno di questi due raggi penetrando nell'altro cristallo vi passa senza più dividersi in due, e si vedono due sole immagini $L_o\, L_e$ del punto luminoso L (Fig. 65, e Fig. 66 n.° 1). Ma se si fa girare il cristallo superiore sopra se stesso, in modo che la rotazione si effettui intorno ad un'asse perpendicolare alle facce dei due cristalli, e le loro sezioni principali vengano a tagliarsi su quest'asse ed a formare un'angolo diedro, tosto ognuno dei due raggi $O'O''$, $S'S''$ (Fig. 65) si suddivide in altri due, e si scorgono quattro immagini del punto luminoso (Fig. 66 n.° 2). Le due nuove immagini sono da principio molto deboli, ma le intensità delle loro luci vanno crescendo a spese delle immagini primitive, più l'angolo diedro fatto dalle sezioni principali aumenta, e quando quest'angolo è divenuto di 45° le quattro immagini sono eguali in intensità di luce, e formano un rombo o più generalmente un parallelogrammo (Fig. 66 n.° 3). Come le immagini *o*, *o* fatte dai raggi rifratti ordinariamente dal cristallo superiore rimangono, per le leggi della rifrazione ordinaria, evidentemente immobili durante la rotazione dello stesso cristallo, sono le immagini straordinarie *s*, *s* che si vedono rivolgersi rispettivamente intorno alle prime.

Continuando a girare il secondo cristallo, le nuove immagini, cioè quelle comparse dopo, acquistano un eccedente di splendore su quelle esistenti prima (Fig. 66 n.° 4), e quando la sezione principale del secondo cristallo viene ad essere ad angolo retto con quella del primo, le immagini preesistenti si estinguono, e non rimangono, come da principio, che due sole immagini, quelle che apparvero dopo (Fig. 66 n.° 5), con questa differenza, che quella *o* fatta dai raggi rifratti ordinariamente nel secondo cristallo, consta dei raggi che hanno subito la rifrazione straordinaria nel primo; e viceversa, che quella *s* fatta dai raggi rifratti straordinariamente nel secondo cristallo, è formata dai raggi che sono stati rifratti ordinariamente nel primo.

Se si fa fare al pezzo superiore di cristallo una rotazione per un' altro quadrante, si rinnovano dei fenomeni analoghi. Le due immagini che vennero ad estinguersi un poco prima, ricompariscono in un luogo poco discosto (Fig. 66 n.° 6), poi crescono successivamente d' intensità sino ad eguagliare le due che erano rimaste (Fig. 66 n.° 7), in seguito le superano (Fig. 66 n.° 8), e finita la semirivoluzione le immagini preesistenti spariscono, e le due nate dopo si compenetrano in una (Fig. 66 n.° 9), se i due cristalli hanno uno stessa grossezza, come è supposto nella Fig. 67.

Compiendo poi l' intero giro, col far fare al cristallo superiore un' altra mezza rivoluzione, non si nota più che una ripetizione degli stessi fenomeni, in ordine inverso a quelli osservati nella prima mezza rivoluzione. Huyghens fece anche la riflessione che le quattro immagini prese assieme non sembrano aver più luce della sola che produce il raggio incidente *I L*.

Da questo esperimento Huyghens aveva inferito, che le onde luminose, dopo aver attraversato il primo cristallo, acquistano una forma o disposizione per la quale incontrando il tessuto del secondo cristallo in certe posizioni, possono eccitare amendue le falde dell' onda totale, o, come egli diceva, possono smuovere le due differenti materie che servono alle due specie di rifrazione, mentre incontrandolo in altre posizioni, non destano che una sola falda, o non smuovono che una di queste materie. Noi diremo ora che le vibrazioni, di cui consta la luce che è stata sottoposta alla doppia rifrazione, devono aver subito qualche modificazione da quando formavano la luce naturale, poichè questa sempre somministra attraverso lo spato d' Islanda due immagini eguali, mentre l' altra dà più comunemente due immagini diseguali, e talvolta una sola.

2. Questi fatti erano rimasti isolati e senza sviluppo sino all' anno 1809, quando Malus osservando accidentalmente attraverso di un prisma di spato d' Islanda la luce del Sole cadente, riflessa dai vetri di una lontana finestra, notò, girando la sezione principale del cristallo, un' alternativa nell' intensità delle due immagini ordinaria e straordinaria, simile a quella che presentano le immagini fatte dalla luce che ha subito prima la rifrazione in un pezzo di spato d' Islanda, per cui congetturò che la luce riflessa dai vetri della finestra avesse acquistata la stessa modificazione che riceve dalla doppia rifrazione. Questa congettura concepita da un uomo di genio, aprì la strada alla scoperta di tanti fenomeni singolari e mirabili di cui si è arricchita l' ottica in questi ultimi anni, e che sembrano dover guidare a delle cognizioni più intime intorno alla costituzione molecolare dei corpi.

Malus per verificare la sua congettura produsse dunque artificialmente il fenomeno che il caso gli aveva presentato. Si sa che, se si fa cadere sopra una superficie diafana un raggio di luce, non tutto si rifrange ed attraversa il corpo diafano, ma una parte è regolarmente riflessa alla sua superficie. Ricevendo Malus la porzione di luce riflessa del raggio incidente sotto un' angolo di 54°. 35′ colla prima superficie di un vetro, di cui aveva annerito la seconda superficie, onde la luce posteriore non concorresse a complicare il fenomeno, trovò che il raggio riflesso si comporta infatti esattamente come il raggio ordinario che ha attraversato un primo pezzo di spato d' Islanda. Se la sezione principale del pezzo analizzante di spato d' Islanda era nel piano d' incidenza e riflessione, il raggio riflesso nel passar per esso non si rifrangeva che ordinariamente, girando per un angolo $< 90°$ la sezione principale intorno allo stesso raggio, come asse, questo raggio si divideva in due, uno rifratto ordinariamente, l' altro rifratto straordinariamente; e la intensità di luce del primo andava diminuendo, mentre quella del secondo iva crescendo a misura che l' angolo diedro fatto dal piano di riflessione e dalla sezione principale aumentava; e quando quest' angolo diveniva retto, il primo raggio spariva, e non rimaneva che il secondo tutto rifratto straordinariamente. Il raggio riflesso sotto l' incidenza di 54°. 35′ riferito al piano d' incidenza e riflessione si comporta dunque come un raggio ordinario che sia stato rifratto nella sezione principale di un cristallo birifrangente. Amendue non si rifrangono che ordinariamente, se il piano d' incidenza e riflessione, o se il piano della sezione principale del primo cristallo rifrangente sono paralleli alla sezione principale

del secondo cristallo birifrangente, amendue non si rifrangono che straordinariamente se i detti piani sono perpendicolari fra di loro.

3. Malus invertì l'esperimento, e ricevette il raggio ordinario rifratto da un cristallo birifrangente nel piano della sezione principale sopra la prima superficie di un vetro inclinata di un'angolo di 35°. 25' col raggio rifratto. Se il piano di riflessione era parallelo alla sezione principale, il raggio riflesso era nella massima intensità, ma girando il piano di riflessione intorno al raggio incidente, in modo che l'angolo d'incidenza si conservasse sempre di 54°. 35', vide che il raggio riflesso andava continuamente scemando d'intensità, sino a che, quando il piano di riflessione era perpendicolare a quello della sezione principale, il raggio riflesso spariva, ed era rifratto in totalità.

Se invece d'impiegare in quest'ultimo sperimento il raggio ordinario s'impiega lo straordinario succede l'opposto. Il raggio straordinario si rifrange interamente e passa nel vetro senza dar riflessione nessuna se il piano di riflessione è parallelo alla sezione principale, girando il piano di riflessione, e conservando l'angolo d'incidenza, il raggio comincia a riflettersi in piccola parte, e, quando il piano di riflessione è perpendicolare alla sezione principale, l'intensità di luce del raggio riflesso è al suo massimo.

Paragonando questo risultamento con quello ottenuto da Huyghens coi due pezzi di cristallo birifrangente, si vede che il raggio ordinario e straordinario in quanto alle proprietà che esaminiamo si comportano egualmente del raggio riflesso, e non differiscono se non in ciò, che uno presenta in un piano le proprietà che presenta l'altro nel piano perpendicolare al primo.

4. Secondo le proprietà descritte, che acquistano i raggi di luce per la riflessione sulle sostanze diafane, è facile il prevedere che, se si riceverà un raggio di luce riflessa da una di queste superficie, sotto la suddetta incidenza, sopra una seconda superficie (Fig. 68), il raggio riflesso la prima volta, essendo in tutto paragonabile al raggio ordinario rifratto nella sezione principale di un cristallo birifrangente, sarà riflesso in parte la seconda volta, se il piano della seconda riflessione sarà parallelo a quello della prima, e sfuggirà totalmente alla riflessione, e sarà semplicemente rifratto, se i due piani d'incidenza e riflessione saranno perpendicolari fra loro. Questo è infatti ciò che l'esperienza conferma, impiegando un apparecchio di due tubi AB, CD, ciascuno dei quali porta un vetro, annerito per didietro, ed inclinato di 35°. 25' coll'asse comune dei tubi. Ricevendo il raggio LI sotto l'inci-

denza di 54°. 35', e girando il tubo *A B* intorno a *C D* si osserva che il raggio è riflesso colla massima intensità quando i due specchi sono paralleli, e non è più riflesso quando i due piani di riflessione sono perpendicolari tra loro.

5. Le proprietà che abbiamo descritto sono quelle che hanno fatto dare il nome di luce *polarizzata* a quella che compone i raggi che le presentano. Se immaginiamo che le sezioni trasversali di un raggio ordinario e di un raggio straordinario prodotti da un cristallo birifrangente, o quella di un raggio riflesso da una superficie di vetro sotto l'angolo d'incidenza di 54°. 35' siano rappresentate da tre circoli, (Fig. 69), e conduciamo rispettivamente in questi circoli un diametro *A B* che sia parallelo alla sezione principale del cristallo birifrangente, l'altro diametro *C D* che ne sia perpendicolare, ed il diametro *E F* che sia nel piano d'incidenza e riflessione del raggio riflesso, tutti e tre i raggi rispettivi saranno tali, che presentandoli ad un secondo cristallo birifrangente, o ad una seconda riflessione sopra una superficie rifrangente offriranno tutti le stesse proprietà, quando si dia ai diametri *A B*, *C D*, *E F*, od ai piani, in cui i raggi e questi diametri sono situati, la stessa posizione relativamente alla sezione principale del secondo cristallo birifrangente, o della seconda superficie riflettente; ma queste proprietà cambieranno simultaneamente a seconda che i piani in cui sono situati i detti diametri formeranno degli angoli diedri diversi colla sezione principale del cristallo che li rifrange, o col piano d'incidenza della superficie che li riflette. Come dunque, dice Sir. D. Brewster, le proprietà dei detti raggi sono relative alle situazioni dei punti *A*, *B*; o *C*, *D*; o *E*, *F* che stanno alle estremità dei detti diametri, si possono considerare questi punti come *poli*, e quindi la luce che compone tali raggi si dice polarizzata, ed i piani che passano pei raggi di luce e pel diametri *A B*, *C D* o *E F* si chiamano i piani di polarizzazione.

Un carattere distintivo di un raggio di luce polarizzata è dunque quello di non rifrangersi che ordinariamente da un cristallo bifrangente, se la sezione principale di questo cristallo è parallela al piano, o solo straordinariamente, se la sezione principale è perpendicolare al piano; o pure di riflettersi in parte dalla prima superficie di un vetro sotto un'angolo d'incidenza di 54°. 35' se il piano d'incidenza è parallelo, e di non riflettersi affatto se è perpendicolare al piano di polarizzazione.

6. Fra i cristalli rifrangenti proprii per sottoporre un raggio di luce a queste prove, uno dei preferibili è una lamina di tor-

malina, le cui facce siano parallele all'asse di cristallizzazione. Le tormaline verdi o gialle, quando hanno una grossezza di circa un millimetro, hanno la proprietà di assorbire la luce, polarizzata nel piano della sezione principale, e di trasmettere quella che è polarizzata perpendicolarmente a questa sezione. Se dunque si osserva con una di queste lamine un raggio di luce e si trova che in una certa posizione il raggio è visibile, e la lamina nel suo maggior grado di trasparenza, e girandola sopra se stessa per 90°, la lamina diventa opaca, diremo che quella luce è polarizzata nel piano, in cui si trova la sezione principale della tormalina in quest' ultima situazione. Se il raggio da sottoporsi ad esame è di luce assai debole, questo mezzo d'esperimento ha però l'inconveniente di ammorzare troppo la luce, e talvolta di farle perdere la sua visibilità.

7. Definito così il carattere che distingue la luce polarizzata dalla naturale, rimane a vedere qual è la proprietà fisica, o per meglio dir meccanica, che fa sì che le onde, per le quali la luce si propaga, danno talvolta origine ai fenomeni della luce naturale, e talvolta a quelli della luce polarizzata. L'essenza di questa proprietà può con molta ragionevolezza congetturarsi dall'esame dei fenomeni d'interferenza operati dalla luce polarizzata. I signori Fresnel e Arago eseguirono varii sperimenti su quest'argomento, noi non ne indicheremo che il più semplice.

L'esperimento che andiamo a descrivere è simile a quello su citato (1) del D.r Young, in cui le frange erano prodotte da due fenditure sottili, parallele e prossime fra loro, illuminate dal di fuori, ma è ripetuto con varie modificazioni. Invece della luce naturale, siasi progettata sulle dette fenditure della luce polarizzata perpendicolarmente alla loro direzione, riflettendola, per esempio, su di esse con un vetro piano, di cui siasi annerita la superficie posteriore, e convenientemente inclinato (2). A ciascuna delle due fenditure siasi applicata una lamina di tormalina, le due lamine essendo di egual grossezza colle loro facce piane perpendicolari alla sezione principale, e colle loro sezioni principali parallele alle fenditure (3). La luce che passerà in questo caso sarà tutta po-

(1) Art. 8 della Lez. XXVIII.

(2) Art. 2 e 4.

(3) Per non anticipare delle nozioni su d'un fenomeno che esporremo nella Lezione seguente abbiamo sostituito due lamine di tormalina a due pile di lamine sottili di vetro che hanno usato i due citati esperimentatori, al che fummo tanto più indotti dal vedere, che nell'articolo *Polarizzazione* dell'En-

larizzata perpendicolarmente alle sezioni principali (1), ed osservando le fenditure illuminate si scorgeranno lateralmente delle frange colorate prodotte nello stesso modo che nell' esperimento, altrove estesamente descritto (2), fatto coi due specchi. Ma se in luogo di tenere le sezioni principali delle due lamine di tormalina parallele alla direzione delle fenditure, si fanno girare le lamine di angoli eguali, una da una parte l' altra dall' altra parte della detta direzione, si vede subito che le frange vanno diminuendo d' intensità, e quando le due sezioni principali delle tormaline giungono a fare ciascuna un'angolo semiretto colla direzione delle fenditure ogni apparizione di frange sparisce. Ora la luce trasmessa dalle tormaline in quest' ultimo caso non essendo che quella parte che è polarizzata perpendicolarmente alle rispettive sezioni principali (3), quella trasmessa dall' una si troverà polarizzata in un piano perpendicolare a quella trasmessa dall' altra. I due risultamenti opposti che si ottengono nei due casi mettono dunque in evidenza una proprietà notevole della luce polarizzata, cioè quella di poter interferire se le due luci sono polarizzate parallelamente nello stesso piano, e di non essere più atta a quest' effetto, se le due luci sono polarizzate in due piani ad angolo retto.

8. Per spiegare questa proprietà il D.r Young ha immaginato che il modo di propagazione della luce fosse tale che, mentre che un' onda si propaga estendendosi dal centro all' infuori, cioè trasmettendo successivamente i suoi tremiti a degli atomi successivamente più lontani dal centro, lasciando tornare al riposo quelli scossi immediatamente prima, i tremiti si facessero però in una direzione trasversale o perpendicolare a quella della loro propagazione (4), talchè nelle onde sferiche le vibrazioni degli atomi si facessero sulle superficie stesse delle onde e perpendicolarmente al raggio. Le vibrazioni trasversali dei punti di una lunga corda tesa, scossa in una estremità, le quali si fanno perpendicolarmente ad essa, ma si propagano nel verso della sua lunghezza, offrirebbero un' immagine delle vibrazioni degli atomi componenti un raggio di luce.

Nella luce naturale questi tremiti si fanno secondo tutte le

ciclopedia Britannica, il Sig. Arago parla di quest' impiego delle due tormaline come d' un esperimento realmente fatto.

(1) Art. 6.

(2) Art. 2 della Lez. XXVIII.

(3) Art. 6.

(4) Art. 6 della Lez. XXVI.

linee che si possono condurre nel piano tangente dell'onda, ed in un tempo brevissimo se ne fa un numero presso che eguale in tutte le direzioni; ma se per l'effetto della rifrazione e della riflessione tutti questi tremiti sono deviati e rivolti in una sola direzione, allora la luce diviene polarizzata nel piano passante pel raggio, e perpendicolare alla detta direzione. (1)

L'effetto dunque che prova la luce nell'attraversare una sezione principale di un cristallo birifrangente si è che mentre prima le vibrazioni degli atomi si facevano in tutte le direzioni perpendicolarmente all'estremità del raggio, dopo all'entrare nel cristallo si scompongono in due gruppi, di cui le une sono tutte perpendicolari al piano della sezione principale, e formano il raggio ordinario, e le altre gli sono tutte parallele, e formano il raggio straordinario.

9. Ognuno dei due raggi, incontrando un secondo cristallo birifrangente, di cui la sezione principale sia parallela o perpendicolare al suo piano di polarizzazione, continua a far le sue vibrazioni nella stessa direzione e passa unico, rifrangendosi ordinariamente o straordinariamente secondo che vibra perpendicolarmente o parallelamente alla detta sezione; ma se il suo piano di polarizzazione fa un angolo diedro, a, colla sezione principale del secondo cristallo, allora le sue vibrazioni al penetrar nel cristallo si scompongono di nuovo in due, una parallela e l'altra perpendicolare al piano della sezione principale, giusta colle stesse regole con cui si fa la decomposizione dei movimenti, per cui detta I la velocità massima della vibrazione primitiva, si hanno quelle delle due vibrazioni componenti

$$(1) \qquad I_o = I \cos a \qquad\qquad I_s = I \sin a$$

Le lettere minuscole o ed s poste sotto alla lettera I indicano che il primo valore appartiene alla vibrazione del raggio ordinario, il secondo a quella del raggio straordinario.

L'intensità della luce si prende sempre come proporzionale alle forze vive trasmesse dagli atomi, cioè al quadrato delle velocità delle vibrazioni. Le intensità delle luci del raggio ordinario e straordinario, in cui si è diviso il raggio nel secondo cristallo, saranno dunque rispettivamente rappresentate da

(1) Vedasi la nota I della Lez. XXXIII.

$$I^2_o = I^2 \cos^2 a; \qquad I^2_s = I^2 \sin^2 a.$$

la cui somma da

$$I^2_o + I^2_s = I^2$$

e ci mostra che la somma delle intensità dei due raggi rifratti è eguale a quella del raggio unico prima della rifrazione. Queste ultime formole sono state date la prima volta da Malus, e confermate con molte esperienze, ciò che verifica l'esattezza delle equazioni (1) da cui siamo partiti.

10. Secondo questo modo di vedere, un fascetto di luce naturale è sempre equivalente a due fascetti di luce di una intensità eguale alla metà, polarizzati in piani ad angolo retto, perchè qualunque sia la direzione della sezione principale del cristallo birifrangente, si può provare facilmente col calcolo integrale, che secondo le formole premesse, un fascetto di raggi polarizzati in egual numero in tutti gli azimut possibili danno lo stesso risultamento, rispetto al raggio ordinario e straordinario, che due fascetti di luce d' intensità eguale alla metà, polarizzati in piani che facciano, per esempio, un angolo di 45°, uno alla diritta, l' altro alla sinistra della sezione principale.

11. Ammessi i principj su esposti, è facile il concepire come la luce polarizzata ad angolo retto non produce frange, o non interferisce. Le vibrazioni che si fanno ad angolo retto non hanno un'azione relativa per ingrandirsi o impiccolirsi reciprocamente nelle proprie direzioni, e non possono interferire come quelle che, facendosi in direzioni parallele, o concorrenti, aggiungono o sottraggono i loro effetti secondo che s' incontrano simultaneamente nello stesso stato appulsivo od impulsivo, o nello stato opposto.

12. Una circostanza degna di osservazione è la seguente. Se i raggi, che sono stati polarizzati ad angolo retto, come nell' esperimento citato all' articolo 7, si riconducono ad uno stesso piano di polarizzazione, facendoli, per esempio, attraversare una terza piastra di tormalina il cui asse ottico faccia un angolo di 45° con ciascuno di quelli delle due lamine, essi tornano ad interferire, e danno luogo all' apparimento di frange, se prima di passare per le due lamine di tormalina appartenevano ad un fascetto unico polarizzato, come era quello che, secondo abbiamo esposto, ha servito ad illuminare le fenditure. Che se, in luogo di luce polarizzata, s' impiegasse un fascetto di luce naturale, allora non si noterebbe più interferenza alcuna. Di qui s' inferisce che la luce naturale, che

benchè divisibile in due luci eguali polarizzate ad angolo retto, è formata da un complesso di onde elementari, la cui composizione non rimane costante; il che può ragionevolmente congetturarsi dal considerare lo stato d'agitazione rapida ed irregolare, in cui devono trovarsi le molecole dei corpi luminosi. Le onde generate nell'etere dai movimenti vibratorii di queste molecole devono avviarsi, succedersi, estinguersi, in un modo irregolare; e quantunque si provi col calcolo, che un gran numero di sistemi di onde polarizzati in tutti gli azimut possa sempre considerarsi ridotto a due soli sistemi polarizzati ad angolo retto e d'eguale intensità, non ne segue però che le fasi di questi due sistemi siano eguali. Per lo contrario il calcolo ci fa vedere che le loro fasi saranno diverse e continuamente variabili, per cui le due porzioni di luce, componenti i due detti sistemi, saranno incapaci di concordare o discordare per una durata sensibile di tempo e quindi d'interferire fra loro.

13. Tutti i cristalli birifrangenti, tanto ad uno che a due assi ottici, imprimono alla luce che li traversa lo stato di polarizzazione, ed i raggi che emergono sono amendue polarizzati ad angolo retto fra loro. Per assegnare il piano di polarizzazione di uno di questi raggi conviene richiamare le costruzioni date all'articolo 12 della Lezione XXX, ed all'articolo 4 della Lezione XXXI, per determinare la direzione del raggio rifratto. Se dal punto I d'incidenza s'abbassa sul piano tangente alla superficie di propagazione del tremito una perpendicolare $I\pi$, (Fig. 57) e si unisce il piede di questa perpendicolare col punto di contatto π, la retta πE, congiungente questi due punti, che non è altro che la projezione del raggio rifratto sullo stesso piano tangente, determina la direzione secondo cui vibrano gli atomi posti sullo stesso raggio luminoso. Il piano che passa per questa retta e pel punto d'incidenza è in conseguenza perpendicolare al piano di polarizzazione del raggio (1), e per altre considerazioni si trova che, nei cristalli con due assi ottici, questo piano, o quello che gli è perpendicolare, divide per metà l'angolo diedro che formano i due piani passanti per la direzione del raggio e ciascuno dei due assi ottici, come anche quello che formano i due piani passanti per la perpendicolare al piano di contatto, o dell'onda, e ciascuno dei due assi di rifrazione conica.

(1) Art. 8.

14. Lo stato di polarizzazione può comunicarsi alla luce non solo facendola traversare dei cristalli bifrangenti, o facendola riflettere sopra specchi di materie trasparenti, ma anche per mezzo della rifrazione ordinaria. Se un fascetto di luce è riflesso da uno specchio trasparente, parte della sua luce è polarizzata, come abbiamo detto, per riflessione; se poi si analizza quella che passa per rifrazione, col mezzo di una tormalina, si trova che essa offre non più un'immagine eguale in intensità in tutte le direzioni, e che quando la sezione principale, o l'asse della tormalina è nel piano di rifrazione, l'immagine è più viva e si fa più debole quando l'asse diviene perpendicolare al detto piano. Ora questo è appunto l'opposto di ciò che succede colla luce riflessa, dunque dobbiamo conchiudere che mentre la riflessione polarizza in parte la luce nel piano di riflessione, la rifrazione la polarizza in parte perpendicolarmente a questo piano.

Il sig. Arago ha provato, per mezzo di un'esperimento semplice ma ingegnoso, che la quantità di luce polarizzata in parte per riflessione è sempre eguale a quella polarizzata in parte ad angolo retto per rifrazione.

Sia *F D* (Fig. 70) una lastra di cristallo tenuta verticalmente sopra la superficie piana riflettente *A B*, che supporremo per esempio un foglio di carta bianca. Un occhio situato in *E* riceverà simultaneamente il raggio riflesso *I L* ed il raggio rifratto *I' L'*, e come tutto è simile da una parte e dall'altra della lastra, la luce rifratta secondo *L' I' I S* sarà esattamente eguale a quella che passa al di là della lastra nella direzione di *L I L''*. Pongasi in *m n* un diaframma opaco, annerito, e con un piccolo foro in *S*, e finalmente abbiasi avanti l'occhio un cristallo birifrangente *C* il quale offra due immagini dell'apertura *S*.

Se ora per mezzo di un piano nero opaco situato fra *L'* ed *I'* intercettiamo il raggio *L' I'*, che avrebbe attraversato la lastra *D F*, il cristallo birifrangente non riceverà che la luce riflessa, ed essendo situato colla sezione principale nel piano di riflessione, presenterà un'immagine ordinaria più intensa della straordinaria. Ma se poniamo il piano opaco fra *L* ed *I*, allora sarà il raggio riflesso quello che sarà intercettato, il rifratto arriverà solo al cristallo birifrangente, e questo conservato nella situazione di prima presenterà l'immagine straordinaria del foro più brillante dell'ordinaria. Se l'eccesso di luce dell'immagine ordinaria sopra la straordinaria nel primo caso, è eguale all'eccesso dell'immagiue straordinaria sopra l'ordinaria nel secondo, o in altri termini, se la luce polariz-

zata in parte nel piano di riflessione nel primo caso è eguale a quella polarizzata in parte perpendicolarmente a questo piano, nel secondo caso le quattro immagini riunite a due a due devono formare due immagini eguali; ora questo è appunto quello che si trova facendo l'esperimento col lasciar arrivare contemporaneamente il raggio rifratto ed il raggio riflesso, e variando anche l'angolo formato dal raggio $L I L' I'$ colla lastra di vetro, ciò che non può essere a meno che le due luci polarizzate in parte ad angolo retto non si mantengano sempre eguali.

È necessario osservare che la luce rifratta che giunge all'occhio, quando s'intercettano i raggi provenienti dalla superficie $A D$, non è soltanto quella che passa direttamente in I', ma che a questa si aggiunge quella che si rifrange in i', e dopo due riflessioni sorte parimente in I, quella che si rifrange in i'', e dopo quattro riflessioni sorte pure in I e così successivamente.

Parimenti si deve osservare che la luce che perviene all'occhio quando s'intercettano i raggi che emanano dalla superficie $B D$, non è soltanto quella riflessa in I, ma che a questa s'aggiunge quella rifratta in $i_{,}$, e che riflessa poi in I' sorte rifratta un'altra volta in I; quella che rifratta in $i_{,,}$ dopo tre riflessioni si rifrange al sortire in I, e così successivamente. Proveremo in una nota della Lezione seguente, che tenendo conto di tutte queste luci la legge del sig. Arago, è rigorosamente conforme alle formole che ha dedotto Fresnel pel cálcolo dell'intensità della luce polarizzata per riflessione, le quali sono interamente confermate dall'esperienza.

Il Fresnel ha generalizzato questo principio rimarchevole, che tutte le volte che la luce si divide in due fascetti (senza che vi sia assorbimento) la medesima quantità di luce polarizzata in uno, si trova nell'altro polarizzata ad angolo retto.

LEZIONE XXXIII.

Leggi della polarizzazione della luce riflessa e rifratta dalle superficie diafane dotate della rifrazione semplice.

1. Tosto che l' attenzione dei Fisici fu rivolta verso le importanti proprietà della polarizzazione, che la luce riceve al riflettersi ed al rifrangersi sulla superficie dei mezzi diafani, una moltiplicità di fenomeni furono sperimentalmente prodotti, ed una quantità di leggi furono dedotte per rappresentarli. Fresnel, colla scorta di questi dati, assumendo il principio meccanico che le somme delle forze vive degli atomi del raggio riflesso e rifratto sia eguale alla forza viva che vi apporta il raggio incidente, e supponendo che le velocità degli atomi parallele alla superficie di separazione dei due mezzi siano eguali per gli atomi posti al di qua ed al di là di questa superficie, è riuscito (1) a stabilire per mezzo di considerazioni meccaniche due formole che compendiano tutte le leggi trovate, e formano la base di tutta la teorica conosciuta sull' intensità, e sulla polarizzazione della luce riflessa e rifratta nei mezzi diafani dotati di rifrazione semplice.

Paghi d' aver accennato i principii, sui quali si fondano le formole di Fresnel, rimanderemo ad una nota (2) la deduzione di queste formole, la quale lascia ancora qualche cosa a desiderare da parte del rigore; e risguardando le stesse formole come le espressioni matematiche di tutte le leggi trovate sperimentalmente, le riferiremo soltanto, mostrandone la loro applicazione.

2. Le due formole di cui parliamo sono relative, una al caso in cui la luce incidente è polarizzata nel piano di riflessione, l'altra a quello in cui è polarizzata perpendicolarmente allo stesso piano.

Se il raggio di luce è polarizzato nel piano di rifrazione, e rappresentiamo con l' unità la sua intensità, con i l' angolo d' incidenza, e con i' quello di rifrazione, così che sia (Lez. XXIII, art. 11).

$$(a) \qquad \sin i' = \frac{1}{n} \sin i$$

(1) Annales de Chimie et de Physique tom. XVII. e tom. XXIX, e Mémoires de l'Académie royale des Sciences, tom. XI.

(2) Vedi la Nota I.

Fresnel ha provato che il suddetto raggio dividendosi in due, uno riflesso e l'altro rifratto, il primo avrà l'intensità

$$(1) \qquad I^2_e = \frac{\sin^2(i - i')}{\sin^2(i + i')};$$

e per conseguenza, supponendo trascurabile la luce riflessa irregolarmente od assorbita, l'altro rifratto conserverà l'intensità

$$(1)' \qquad I^2_d = 1 - \frac{\sin^2(i - i')}{\sin^2(i + i')} = \frac{\sin 2i \,.\, \sin 2i'}{\sin^2(i + i')}.$$

Nel secondo caso, quando il raggio incidente è polarizzato perpendicolarmente al piano di rifrazione, il raggio riflesso avrà l'intensità

$$(2) \qquad I^2_e = \frac{\tan^2(i - i')}{\tan^2(i + i')}$$

e per il raggio rifratto l'intensità sarà

$$(2)' \quad I^2_d = 1 - \frac{\tan^2(i - i')}{\tan^2(i + i')} = \frac{2 \sin 2i \sin 2i'}{\sin^2(i + i')} \cdot \frac{1}{\cos^2(i - i')}.$$

Le formole (1) e (2) e le loro conseguenti (1)' (2)' sono le formole fondamentali di Fresnel, col mezzo delle quali, e delle leggi stabilite precedentemente possiamo determinare la intensità dei raggi riflessi e rifratti ed i loro piani di polarizzazione in tutti gli altri casi.

3. Supponiamo infatti che il raggio incidente non sia polarizzato nè nel piano di riflessione, nè perpendicolarmente ad esso, ma in un piano che faccia con quello di riflessione un angolo a, il qual angolo si chiama in ottica *azimut* del piano di polarizzazione. In questa circostanza si scomporrà, giusta la regola dell'articolo 9 della premessa Lezione, il raggio incidente, la di cui intensità rappresenteremo più generalmente con I^2, in due, uno dell'intensità $I^2 \cos^2 a$ polarizzato nel piano di riflessione, e l'altro dell'intensità $I^2 \sin^2 a$ polarizzato perpendicolarmente ad esso. Sostituendo l'intensità $I^2 \cos^2 a$ invece dell'intensità uno nelle formole (1) ed (1)', e ponendo per semplicità

$$(3) \qquad -\frac{\sin(i - i')}{\sin(i + i')} = p,$$

il primo raggio somministrerà alla riflessione un raggio dell'intensità

$$(4) \qquad I^2 p^2 \cos^2 a$$

ed alla rifrazione un raggio dell' intensità

$$(5) \qquad I^2 (1 - p^2) \cos^2 a.$$

Parimente sostituendo $I^2 \sin^2 a$ all' unità nelle formole (2) e (2)', e ponendo per brevità

$$(6) \qquad -\frac{\tan(i - i')}{\tan(i + i')} = q,$$

il secondo raggio somministrerà alla riflessione un raggio dell' intensità

$$(7) \qquad I^2 q^2 \sin^2 a$$

ed alla rifrazione un raggio dell' intensità

$$(8) \qquad I^2 (1 - q^2) \sin^2 a.$$

Secondo i principii sui quali sono fondate le formole dell' articolo 9 della Lezione precedente, sommando le intensità dei due raggi riflessi, si avrà l' intensità del raggio totale, espressa da

$$(9) \qquad I^2_c = I^2 p^2 \cos^2 a + I^2 q^2 \sin^2 a.$$

Parimente sommando le intensità dei due raggi parziali rifratti si avrà l' intensità del raggio rifratto, data da

$$(10) \qquad I^2_d = I^2 (1 - p^2) \cos^2 a + I^2 (1 - q^2) \sin^2 a.$$

Le velocità massime degli atomi nel primo raggio parziale riflesso (4) in cui le vibrazioni sono perpendicolari al piano di riflessione essendo proporzionali alle radici dell' intensità dello stesso raggio, (1), potranno essere espresse da

$$I p \cos a.$$

Per la stessa ragione le velocità massime degli atomi del secondo raggio parziale riflesso (7) dirette parallelamente al piano di riflessione, saranno date da

$$I q \sin a.$$

Questi due raggi parziali agendo simultaneamente sugli atomi

(1) Lezione XXXII, art. 9, e Lezione II art. 2.

dell' etere, e sempre colle loro fasi nello stesso grado, imprimeranno ad essi delle velocità risultanti che verranno ad essere tutte dirette parallelamente ad uno stesso piano, il quale, secondo le regole comuni della composizione delle velocità, farà col piano di riflessione un angolo a_e, tale che

$$(11) \qquad \tan a_e = \frac{q}{p} \tan a ;$$

ed il raggio totale riflesso apparirà polarizzato in questo piano.

Nello stesso modo, notando che le velocità componenti perpendicolari e parallele al piano di rifrazione degli atomi agitati simultaneamente dal primo e secondo raggio parziale rifratto sono espresse rispettivamente da

$$I \sqrt{1 - p^2} . \cos a \qquad \text{ed} \qquad I \sqrt{1 - q^2} \sin a ,$$

si proverà che le velocità risultanti degli stessi atomi si troveranno tutte dirette in un piano che farà con quello di rifrazione un azimut a_d la cui tangente sarà data dal quoziente delle due espressioni precedenti, o sia da

$$(12) \qquad \tan . a_d = \frac{\sqrt{1-q^2}}{\sqrt{1-p^2}} . \tan. a$$

ed il raggio rifratto sarà polarizzato in questo piano.

Dalla combinazione delle due equazioni (9) ed (11) è facile di ricavare

$$(13) \quad I^2_e \cos^2 a_e = I^2 p^2 \cos^2 a \;\; ; \quad (14) \quad I^2_e \sin^2 a_e = I^2 q^2 \sin^2 a$$

la prima formola dà l' intensità della porzione di luce del raggio riflesso polarizzata nel piano d' incidenza, e la seconda quella che è polarizzata nel piano opposto: chiamasi piano *opposto* nella teoria della polarizzazione quello che è ad angolo retto col piano a cui è riferito.

Parimente dalle due formole (10) e (12) si dedurranno le seguenti

$$(15) \; I^2_d \cos^2 a_d = I^2 (1-p^2) \cos^2 a \; ; \quad (16) \; I^2_d \sin^2 a_d = I^2 (1-q^2) \sin^2 a ,$$

la prima delle quali dà l'intensità della porzione di luce del raggio rifratto che trovasi polarizzato nel piano d' incidenza, e la seconda quella che trovasi polarizzata nel piano opposto.

4. Il calcolo delle quantità p e q secondo le formole (3) e (6)

offre una specie d'indeterminazione nel caso dell'incidenza perpendicolare in cui $i = o$, nel quale la formola (a) dà pure $i' = o$. È facile di trovare i valori di quelle quantità, sostituendo alle espressioni trigonometriche date dai primi membri delle citate formole le loro equivalenti, *Legendre Trigonometria* art. XIX, XXIX, e XXX con che si ha

$$(7) \qquad p = -\frac{\sin i \cos i' - \sin i' \cos i}{\sin i \cos i' + \cos i \sin i'}$$

$$q = -\frac{\sin i \cos i - \sin i' \cos i'}{\sin i \cos i + \sin i' \cos i'}$$

ed osservando che dalla formola (a) si deduce

$$\cos i' = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - \sin^2 i}\,.$$

Infatti se si sostituiscono nelle espressioni precedenti di p e q invece di $\sin i'$ e $\cos i'$ i loro valori espressi da $\sin i$, e dopo d'aver tolto il fattore $\sin i$ comune al numeratore e denominatore si fa $\sin i = o$, si trova

$$(18) \qquad p = q = -\frac{n-1}{n+1}$$

per cui le formole (9) (11) e (10), (12) si riducono in questo caso a

$$(19) \qquad I^2_e = I^2\frac{(n-1)^2}{(n+1)^2} \quad , \quad \tan a_e = \tan a$$

$$(20) \qquad I^2_d = I^2\frac{4n}{(n+1)^2} \quad , \quad \tan a_d = \tan a.$$

Le due formole per l'intensità essendo indipendenti dall'azimut a, ciò prova che sotto l'incidenza perpendicolare sempre la stessa quantità di luce è riflessa, e la stessa quantità di luce è rifratta, qualunque sia il piano di polarizzazione del raggio incidente, il quale non è tampoco cambiato dalla riflessione o dalla rifrazione, come ci mostrano le due altre formole.

Tutti i fenomeni conosciuti sulla polarizzazione della luce riflessa e rifratta dai mezzi unirifrangenti s'accordano così bene coi risultati che somministrano le formole precedenti, che quel tanto di vago appare nel modo d'applicazione dei principii meccanici dai quali sono state dedotte sparisce in vista di questa corrispondenza.

5. Per mostrare il detto accordo, cominciamo dal caso più semplice somministrato dall' esperimento di Malus, e supponiamo che un raggio di luce naturale vada ad incontrare una superficie rifrangente diafana. Un raggio di luce naturale può, come abbiamo esposto all' articolo 10 della precedente Lezione, essere considerato come composto di due raggi d' una intensità eguale ad $\frac{1}{2}$, polarizzati ad angolo retto fra loro, uno che faccia, per esempio, un azimut di 45° gradi a destra del piano d' incidenza, l' altro un azimut di 45° a sinistra.

Pel primo di questi raggi si avrà quindi a porre nelle formole (13) e (14)

$$I^2_e = \tfrac{1}{2} \quad , \quad \cos a = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin a = \frac{1}{\sqrt{2}}:$$

e pel secondo

$$I^2 = \tfrac{1}{2} \quad , \quad \cos a = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin a = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ed i valori delle intensità della luce riflessa polarizzata nel piano d' incidenza e di quella polarizzata nel piano opposto risulteranno, pel primo raggio

$$I'^2_e = \tfrac{1}{2}\,p^2 \quad , \quad I'^2_d = \tfrac{1}{2}\,q^2$$

e parimente pel secondo raggio

$$I''_e = \tfrac{1}{2}\,p^2 \quad , \quad I''_d = \tfrac{1}{2}\,q^2.$$

Le luci somministrate dai due raggi, in cui si suppone scomposta la luce naturale, essendo incapaci d' interferire fra loro (1), non si avranno a comporre le vibrazioni fatte negli stessi piani, colle regole date agli articoli 10 ed 11 della Lezione XXVI, ma basterà sommare le due porzioni polarizzate nel piano d' incidenza, e le due porzioni polarizzate nel piano opposto, per avere le intensità totali rispettive delle due luci polarizzate nei due piani, componenti il raggio riflesso, si avrà così

$$(21) \quad I^2_e \cos^2 a_e = \tfrac{1}{2}\,p^2 \qquad (22) \quad I^2_e \sin^2 a_e = \tfrac{1}{2}\,q^2.$$

L' incidenza di 54°. 35', sotto la quale Malus faceva cadere il raggio di luce naturale sulla prima superficie di un vetro piano in cui $n = 1,5$, era probabilmente stimata un po' meno del vero per la difficoltà dell' esperienza, e può assumersi eguale a 56°. 19':

(1) Lezione XXXII, art. 2.

se si fa $i = 56^\circ. 19'$, ed $n = 1{,}5$ nella formola (1), si ha

$$\log \sin i' = 9{,}7440 \quad , \quad i' = 33^\circ. 41'$$

e quindi

$$i + i' = 90^\circ = \frac{\pi}{2}.$$

Impiegando questi valori di i ed i' per calcolare secondo le formole (3) e (6) i valori di p, e q, e trasportandoli nelle espressioni precedenti (21), (22) si ha

$$I_c^2 \cos^2 a_c = 0{,}0740 \quad ; \quad I_c^2 \sin^2 a_c = 0:$$

il che ci fa vedere che la luce riflessa è tutta polarizzata nel piano d'incidenza, come l'esperienza di Malus avea mostrato.

Se si ricevesse il raggio riflesso sopra una seconda superficie di un vetro simile in modo che il suo piano di polarizzazione fosse ad angolo retto col piano d'incidenza bisognerebbe porre nelle formole (13) (14), e (3) (6), $\frac{\pi}{2}$ in luogo di a e di $i + i'$, e si avrebbe

$$I_c^2 \cos^2 a_c = 0 \quad , \quad I^2 \sin^2 a_c = 0;$$

cioè non vi sarebbe più luce riflessa, ciò che dà il secondo caso dell'esperimento di Malus citato all'articolo 4 della precedente Lezione.

5. L'angolo d'incidenza sotto il quale la luce riflessa è tutta polarizzata nel piano di riflessione chiamasi *incidenza principale*, od *angolo di polarizzazione massima*. Quest'angolo è dato per tutte le sostanze diafane dalla condizione

$$(23) \qquad i + i' = \frac{\pi}{2},$$

che rende infinito il valore di $\tan(i + i')$, e perciò nullo quello di q dato dalla formola (6).

Se dalla formola precedente si ricava il valore di i' e si sostituisce nell'equazione (a) si avrà

$$\sin i' = \cos i = \frac{1}{n} \sin i;$$

e quindi

$$(24) \qquad \tan i = n;$$

cioè la tangente dell'angolo di polarizzazione massima è eguale

all' indice di rifrazione. La formola (23) ci mostra anche che il raggio riflesso ed il raggio rifratto sono ad angolo retto fra loro. Questo teorema notabile è stato dato da Sir D. Brewster prima che le formole generali precedenti fossero state trovate da Fresnel. Il Sig. Seebeck di Berlino lo ha verificato con molta esattezza sperimentalmente sulle sostanze seguenti

NOMI DELLE SOSTANZE	INDICI di rifrazione	ANGOLO DI POLARIZZAZIONE MASSIMA	
		OSSERVATO	CALCOLATO
Spato fluore incoloro.........	1,4341	55°. 06',7	55°. 06',7
Detto azzurro cenericcio......	1,4343	55 . 03 ,8	55 . 07 ,0
Opal comune................	1,4516	55 . 29 ,3	55 . 26 ,3
Vetro da lamine inglesi incoloro	1,5130	56 . 36 ,0	56 . 32 ,2
Detto......	1,5266	55 . 45 ,5	56 . 46 ,4
Vetro crown inglese..........	1,5321	56 . 50 ,2	56 . 52 ,0
Detto........................	1,5523	57 . 12 ,6	57 . 12 ,6
Vetro flint inglese............	1,5783	57 . 41 ,0	57 . 38 ,5
Detto........................	1,6206	58 . 16 ,6	58 . 19 ,4
Pirite........................	1,8131	61 . 04 ,0	61 . 07,7
Detta gialla..................	2,3692	67 . 08 ,2	67 . 07 ,0

7. Se un raggio di luce polarizzato in un piano diverso da quello di riflessione, o pure un raggio di luce naturale non cade sotto l' incidenza principale, le formole (11), (13) e (14) ci fanno vedere che il raggio riflesso non è mai tutto polarizzato nel piano d' incidenza, poichè nessuna delle quantità p, q, cos a, e sin a può divenir nulla in questi casi. Questo è infatti ciò che mostra anche l' esperienza; ma se si fanno subire più riflessioni successive al raggio, si trova che alla fine l' ultimo raggio riflesso è sensibilmente tutto polarizzato nel piano d' incidenza. Per ve-

dere come le formole date somministrano questo risultato supponiamo che il raggio I^2_c, formola (9), che ha già subito una riflessione cada sopra una nuova superficie rifrangente eguale e parallela alla prima, dovremo in questo caso, per determinare l'intensità I^2_{2c}, e l'azimut, a_{2c}, del piano di polarizzazione che gli corrisponde dopo questa nuova riflessione sostituire I^2_c ed a_c in luogo di I^2 e di a nelle formole (9), (11), (13), (14) con che si otterrà

$$I^2_{2c} = I_c^2 p^2 \cos^2 a_c + I^2_c q^2 \sin^2 a_c \quad ; \quad \tan a_{2c} = \frac{q}{p} \tan a$$

$$I^2_{2c} \cos^2 a_{2c} = I^2_c p^2 \cos^2 a_c \quad ; \quad I^2_{2c} \sin^2 a_{2c} = I^2_c q^2 \sin a_c.$$

Mettendo ora per I_c^2 ed a_c i loro valori in funzione di I^2 ed a date dalle formole ora citate si avrà

$$I^2_{2c} = I^2 p^4 \cos^2 a + I^2 q^4 \sin^2 a \quad ; \quad \tan a_{2c} = \frac{q^2}{p^2} \tan a$$

$$I^2_{2c} \cos^2 a_{2c} = I^2 p^4 \cos^2 a \quad ; \quad I^2_{2c} \sin^2 a_{2c} = I^2 q^4 \sin^2 a.$$

Dal processo di calcolo, che ora abbiamo seguito, facilmente si rileva che volendo progredire alla determinazione dell'intensità del raggio e dell'azimut del piano di polarizzazione nella terza, quarta n^{sima} riflessione basterà aumentare successivamente di due unità gli esponenti di p e q nella prima e nelle due ultime delle precedenti equazioni, e moltiplicare successivamente pel rapporto $q : p$ il secondo membro della seconda equazione, si avrà così dopo n riflessioni del raggio primitivo

$$(25) \quad I^2_{nc} = I^2 p^{2n} \cos^2 a + I^2 q^{2n} \sin^2 a \quad ; \quad (26) \quad \tan a_{nc} = \frac{q^n}{p^n} \tan a$$

$$(27) \quad I^2_{nc} \cos^2 a_{nc} = I^2 p^{2n} \cos^2 a \qquad (28) \quad I^2_{nc} \sin^2 a_{nc} = I^2 q^{2n} \sin^2 a.$$

Se ora si osserva che le formole (3) e (6) danno

$$(29) \qquad \frac{q}{p} = \frac{\cos(i + i')}{\cos(i - i')} = \frac{\cos i \cos i' - \sin i \sin i'}{\cos i \cos i' + \sin i \sin i'};$$

e che per essere i ed $i' < \frac{\pi}{2}$, il valore numerico del secondo membro è una frazione le cui potenze vanno successivamente diminuendo di valore, si scorge che l'azimut a_{nc} dato dalla formola (26) anderà successivamente impicciolendosi a misura che il numero n delle riflessioni anderà aumentando, così che dopo

un certo numero di riflessioni il rapporto $q^n : p^n$ essendo divenuto quasi nullo, e l'angolo a_{nc} insensibile, il raggio parrà sensibilmente polarizzato nel piano d'incidenza.

Sir D. Brewster ha dato un' immagine del fenomeno, di cui parliamo nella figura 71 in cui si deve intendere, giusta ciò che abbiamo premesso all' art. 5 della Lezione XXXII, che i circoletti $a\,a$, $a_1\,a_1$, $a_2\,a_2$ ec. rappresentino successivamente le sezioni trasversali del raggio di luce dopo le varie riflessioni. La linea $A\,B$ che li traversa tutti rappresenta costantemente il piano d'incidenza, l'azimut del piano di polarizzazione alla prima incidenza è indicato dalla linea $a\,a$ inclinata di un dato angolo colla linea $A\,B$; dopo la prima riflessione ed alla seconda incidenza è rappresentato dalla linea $a_1\,a_1$, che fa con $A\,B$ un'angolo minore di prima; alla terza incidenza, da $a_2\,a_2$ tuttavia meno inclinata con $A\,B$, e così successivamente, sino a che dopo varie riflessioni l'azimut del piano di polarizzazione rappresentato da $a_n\,a_n$ coinciderà sensibilmente col piano d'incidenza $A\,B$, ed il raggio apparirà polarizzato in questo piano.

8. Se si suppone che il raggio incidente sia di luce naturale converrà porre, come nell'articolo 5, $I^2 = \frac{1}{2}$, e fare prima

$$\cos a = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \sin a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e poi

$$\cos a = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \sin a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

le formole (27) e (28) daranno nel primo caso

$$I'^2_{nc} \cos^2 a_{nc} = \tfrac{1}{4}\,p^2 \quad ; \quad I'^2_{nc} \sin^2 a_{nc} = \tfrac{1}{4}\,q^2$$

e parimente nel secondo

$$I''^2_{nc} \cos^2 a_{nc} = \tfrac{1}{4}\,p^2 \quad ; \quad I''^2_{nc} \sin^2 a_{nc} = \tfrac{1}{4}\,q^2.$$

Le due porzioni polarizzate nel piano d'incidenza, come quelle polarizzate nel piano opposto appartenendo ai due raggi, in cui si suppone scomposta la luce naturale, i quali devono riguardarsi come d'origine diversa (1), quelle porzioni saranno incapaci d'interferire fra loro, e si avrà tanto l'intensità risultante dalle due porzioni polarizzate nel piano di riflessione, come l'intensità risul-

(1) Lezione XXXII, art. 12.

tante dalle due porzioni polarizzate nel piano opposto, prendendo rispettivamente la somma delle porzioni medesime, ciò che dà

$$(30)\quad I^2_{nc}\cos^2 a_{nc} = \tfrac{1}{2}p^{2n} \quad ; \quad (31)\quad I^2_{nc}\sin^2 a_{nc} = \tfrac{1}{2}q^{2n}.$$

Siccome la formola (29) ci mostra che q è sempre minore di p, potremo scrivere la prima di queste formole come segue

$$I^2_{nc}\cos^2 a_{nc} = \tfrac{1}{2}q^{2n} + \tfrac{1}{2}(p^{2n} - q^{2n})$$

da cui rilevasi che il secondo termine sarà sempre positivo. Il primo termine venendo poi ad essere lo stesso del secondo membro dell'equazione precedente, che dà la quantità di luce polarizzata nel piano opposto a quello d'incidenza, si vede che il raggio totale riflesso si troverà formato di due parti, ciascuna eguale ad $\tfrac{1}{2}q^{2n}$, polarizzate in piani opposti, e perciò equivalenti ad una porzione q^{2n} di luce naturale, e di un'altra parte $\tfrac{1}{2}(p^{2n} - q^{2n})$ tutta polarizzata nel piano d'incidenza. Col crescere dell'esponente n, o sia del numero delle riflessioni il valore di q^n diminuirà più rapidamente di p^n, per essere $q < p$, quindi q^n diverrà trascurabile, quando p^n avrà ancora un valore attendibile, così dopo un certo numero di riflessioni la porzione di luce naturale sarà insensibile, ed il raggio riflesso sembrerà tutto polarizzato nel piano d'incidenza.

Facendo riflettere un raggio di luce naturale, sotto l'incidenza di 70°, per cinque volte consecutive su delle lamine di cristallo il cui indice di rifrazione era 1,51 Sir D. Brewster ha trovato che il raggio riflesso sembrava tutto polarizzato nel piano d'incidenza.

Se si eseguisce il calcolo di p e q per mezzo dei valori citati di n, i, e delle formole (3) e (6) si trova

$$p = -0{,}551154 \qquad q = -0{,}204984$$

con questi valori e colle formole (30), (31) si è composto il seguente quadro, nel quale l'intensità del raggio incidente è presa per unità

RIFLESSIONI	Luce polarizzata nel piano di riflessione	Luce polarizzata nel piano opposto	Luce non polarizzata
Prima riflessione ...	0,151885	0,021009	0,042018
Seconda	0,046134	0,000883	0,001766
Terza.............	0,014015	0,000037	0,000074
Quarta............	0,004257	0,000002	0,000003
Quinta.	0,001293	0,000000	0,000000

Questo quadro verifica completamente la corrispondenza delle formole col risultato sperimentale di Sir D. Brewster.

9. Un effetto opposto si ottiene con delle rifrazioni ripetute. Un raggio che venga più volte rifratto passando, per esempio, successivamente per diverse lamine di cristallo finisce coll' essere sensibilmente polarizzato perpendicolarmente al piano d' incidenza. Le formole (10), (12), (15) e (16) conducono pure a questo risultato. Il raggio rifratto una prima volta, al penetrare nella lamina si rifrange un'altra volta all'escire da essa. In questa seconda rifrazione i valori di p^2 e q^2 non differiscono da quelli che corrispondevano alla prima, perchè i nelle formole (3) e (6) si permuterà in i' e viceversa. Applicando quindi lo stesso processo alle formole (10), (12), (15) e (16) che abbiamo usato nell' articolo 7 per le formole analoghe relative alla riflessione, si dedurrà facilmente che dopo n rifrazioni le formole che daranno l' intensità, l' azimut del piano di polarizzazione e le due porzioni di luce polarizzate rispettivamente nel piano di rifrazione e nel piano opposto saranno

$$(32)\quad I_{nd}^2 = I^2\left\{(1-p^2)^n\cos^2 a + (1-q^2)^n \sin^2 a\right\}; \qquad (33)\quad \tan a_{nd} = \frac{(1-q^2)^{\frac{n}{2}}}{(1-p^2)^{\frac{n}{2}}}\tan a$$

$$(34)\quad I_{nd}^2 \cos^2 a_{nd} = I^2 (1-p^2)^n \cos^2 a \quad ; \qquad (35)\quad I_{nd}^2 \sin^2 a_{nd} = I^2 (1-q^2) \sin^2 a.$$

Ora risultando dalle formole (1)' (2)'

$$(36) \qquad \frac{\sqrt{1-q^2}}{\sqrt{1-p^2}} = \frac{1}{\cos(i-i')}$$

il valore del rapporto dei due radicali sarà sempre maggiore dell'unità per essere cos $(i - i')$ sempre una frazione, e perciò il fattore di tan a nel secondo membro dell'equazione (33) anderà continuamente aumentando col crescere dell'esponente n, così che dopo un certo numero di rifrazioni il valore di tan a_{nd} sarà estremamente grande, l'angolo a_{nd} quasi retto ed il raggio che prima era polarizzato secondo un piano il cui azimut era a, sembrerà sensibilmente polarizzato ad angolo retto col piano d'incidenza. Il piano di polarizzazione subirà così il movimento che è rappresentato dalla figura 72.

10. Quando il raggio incidente fosse di luce naturale, bisogna, come abbiamo già fatto più volte, considerarlo diviso in due polarizzati respettivamente in piani opposti ed incapaci d'interferire fra loro, e quindi sostituire, nelle formole (34) e (35), $\frac{1}{2}$ invece di I_2, ed $\frac{1}{2}$ invece di $\cos^2 a$ e $\sin^2 a$, e raddoppiare i valori risultanti per tener conto dei due raggi; si avrà così

$$(38)\ I^2_{nd} \cos^2 a_{ne} = \tfrac{1}{2}(1-p^2)^n \quad ; \quad (39)\ I^2_{nd} \sin^2 a_{nd} = \tfrac{1}{2}(1-q^2)^n.$$

Come la formola (36) ci ha mostrato che $1 - q^2 > 1 - p^2$, potremo dare alla seconda di queste equazioni la forma

$$I^2_{nd} \sin^2 a_{nd} = \tfrac{1}{2}(1-p^2)^n + \tfrac{1}{2}\left\{(1-q^2)^n - (1-p^2)^n\right\}$$

ed il secondo termine sarà positivo, e perciò atto a rappresentare una certa intensità di luce. Il primo termine darà una porzione di luce, che combinata con quella eguale polarizzata nel piano d'incidenza data dalla prima delle due equazioni precedenti formerà della luce naturale dell'intensità $(1-p^2)^n$, ed il secondo termine rappresenterà una porzione di luce tutta polarizzata nel piano opposto a quello d'incidenza. Il valore di $1-p^2$ essendo più piccolo di quello di $1-q^2$, col crescere di n, la potenza n^{esima} della prima quantità nell'equazione (38) finirà col diventar insensibile prima della potenza n^{esima} della quantità $(1-q^2)$ nell'equazione (39), così la luce naturale che compone il raggio totale rifratto diverrà insensibile, mentre quella polarizzata nel piano opposto a quello d'incidenza sarà ancora visibile, ed il raggio rifratto sembrerà tutto polarizzato in questo piano.

Sir D. Brewster facendo passare per 24 lamine di cristallo la luce di una candela posta alla distanza di 10 o 12 piedi, e coll' incidenza di 61°, ha trovato che la luce è tutta polarizzata nel piano opposto a quello d' incidenza.

I valori numerici di $1 - p^2$ ed $1 - q^2$, calcolati in questo caso colle formole (a), $(1)'$, $(2)'$ sono

$$1 - p^2 = 0{,}810892 \qquad 1 - q^2 = 0{,}997115$$

con questi valori si è composto, impiegando le formole precedenti (38) e (39), il quadro seguente che contiene le quantità di luce polarizzate rispettivamente nei due piani opposti, dopo che il raggio ha attraversato 6, 12, 18, e 24 lamine, o sia dopo che ha subito 12, 24, 36 e 48 rifrazioni

RIFRAZIONI	Luce polarizzata nel piano d' incidenza	Luce polarizzata nel piano opposto	Luce non polarizzata
Dopo 12 rifrazioni	0,04041	0,48296	0,08083
24	0,00327	0,46650	0,00653
36	0,00026	0,45060	0,00053
48	0,00002	0,43524	0,00004

Da questo quadro si vede che i risultamenti della teoria sono d' accordo con quelli dell' esperienza (1).

(1) Il confronto del quarto numero dell' ultima colonna del quadro precedente, col quarto numero della stessa colonna in questo quadro, potrebbe indurre taluno a farsi la dimanda come l' esperimentatore ha potuto distinguere nel primo caso una luce tanto debole, e nel secondo caso non ha potuto vedere una luce circa 13 volte più forte. Questa difficoltà gli verrà sciolta se rifletterà che nel secondo caso l' intensità totale di luce del raggio era più di 50 volte maggiore di quella del primo, e che quanto maggiore è l' intensità della luce da cui un' occhio è occupato, tanto minore è la sua attitudine a distinguere una luce debole.

In questo calcolo non abbiamo tenuto conto della luce che riflessa dalle superficie delle lamine due volte, od un numero pari di volte viene poi a sortire colla luce semplicemente rifratta. Il risultamento sarebbe diverso in tal caso; ma se le lamine di cui è composta la pila rifrangente hanno una certa grossezza, e l'incidenza del raggio di luce è grande, come negli esperimenti citati, le immagini formate dalle successive luci riflesse rimangono separate e distinte, e facendo l'esperimento sulla prima immagine, quella che forma il raggio di luce che non ha sofferto che delle rifrazioni, le formole trovate sono applicabili.

11. Riassumendo i processi ed i risultamenti di calcolo che abbiamo esposto, si può osservare che l'intensità di un raggio di luce polarizzata nel piano d'incidenza, viene, ad ogni riflessione che soffre, diminuita nella ragione di $p^2 : 1$, ed ad ogni rifrazione, viene diminuita nella ragione di $1 - p^2 : 1$ così che se tutte le superficie riflettenti e rifrangenti sono parallele, e separano due mezzi diversamente rifrangenti in tanti strati, dopo n riflessioni, ed n' rifrazioni, il raggio incidente si troverà ridotto nella ragione di $p^{2n}\ (1 - p^2)^{n'} : 1$, qualunque sia l'ordine con cui le riflessioni e rifrazioni si siano succedute.

Lo stesso si deve dire di un raggio polarizzato perpendicolarmente al piano d'incidenza, ad ogni riflessione la sua intensità verrà diminuita nella ragione di $q^2 : 1$; ed ad ogni rifrazione nella ragione di $(1 - q^2) : 1$, e dopo n riflessioni ed n' rifrazioni si troverà ridotto nella ragione di $q^{2n}\ (1 - q^2)^{n'} : 1$.

Siccome un raggio dell'intensità I^2 polarizzato in un piano, il cui azimut sia dinotato da a, può considerarsi come formato di un raggio $I^2 \cos^2 a$ polarizzato nel piano d'incidenza, e di un raggio $I^2 \sin^2 a$ polarizzato nel piano opposto, dopo n riflessioni ed n' rifrazioni l'intensità e l'azimut del piano di polarizzazione del raggio saranno dati da

$$(40)\qquad I^2_{n,n'} = I^2 p^{2n}\ (1 - p^2)^{n'} \cos^2 a + I^2 q^{2n}\ (1 - q^2)^{n'} \sin^2 a$$

$$(41)\qquad \tan a_{n,n'} = \frac{q^n\ (1 - q^2)^{\frac{n'}{2}}}{p^n\ (1 - p^2)^{\frac{n'}{2}}}$$

ed i due termini

$$I^2 p^{2n}\ (1 - p^2)^{n'} \cos^2 a \qquad \text{ed} \qquad I^2 q^{2n}\ (1 - q^2)^{n'} \sin^2 a$$

rappresenteranno l' uno la quantità di luce, componente il raggio, polarizzata nel piano d' incidenza, e l' altro quella polarizzata perpendicolarmente allo stesso piano (1).

(1) Vedi la Nota II.

LEZIONE XXXIV.

Polarizzazione circolare ed ellittica.

1. Le leggi, che abbiamo fatto conoscere nella precedente Lezione, sono applicabili sotto tutte le incidenze ogni qual volta il raggio di luce cade su delle sostanze diafane, non dotate di doppia rifrazione, e la riflessione e rifrazione si fa nel passaggio da un mezzo meno rifrangente ad uno che lo è più. Nel caso che il raggio di luce incidente passi da un mezzo più rifrangente ad uno che lo è meno, esse hanno un limite. In questo caso il valore di n, che dinota il rapporto degli indici di rifrazione del secondo al primo mezzo, diviene frazionario, e quando l'angolo d'incidenza i è giunto a tale grandezza che si abbia $\sin i = n$ per un'angolo ancora maggiore l'equazione (1)

$$\sin i' = \frac{\sin i}{n}$$

dà per $\sin i'$ un valor maggiore dell'unità, e quindi l'angolo i' è incompatibile colla realtà. Fresnel, esaminando le espressioni immaginarie in cui si convertono le formole (17) (art. 4) che danno i valori di p e q in questi casi (1), ha dato un'interpretazione probabile dei fenomeni che significano, la quale andiamo ad esporre confrontandole cogli esperimenti (2).

Tanto un raggio polarizzato nel piano d'incidenza, come uno polarizzato nel piano perpendicolare a quello d'incidenza sono in questi casi totalmente riflessi, ma con questa disparità che uno perde rispetto all'altro una certa differenza di fase. Calcolando per un vetro della fabbrica di s'Gobin, il cui indice di rifrazione era $n = 1{,}51$ e per le incidenze espresse dai valori di i della tavola seguente, Fresnel ha dedotto per le differenze, δ, di fase che devono avere i due raggi riflessi, i valori corrispondenti qui sotto notati, e quindi quelli dei multipli di δ:

$i = 54°.\ 37'$	$\delta = 45°$	$2\delta = 90°$	$4\delta = 180°$
$i = 69\ .\ 12$	$\delta = 30$	$3\delta = 90$	$6\delta = 180$
$i = 64\ .\ 42$	$\delta = 22\ .\ \frac{1}{2}$	$4\delta = 90$	$8\delta = 180.$

(1) Mémoires de l'Académie des Sciences. Tom. XI, pag. 393.
(2) Vedasi la Nota I.

Se a norma di questi risultamenti si costruissero col vetro suddetto dei parallelepipedi tali che le loro basi facessero con una delle facce (Fig. 73, 74, 75) uno dei tre angoli 54°. 37'; 69°. 12'; 74°. 42'; dirigendo su questi prismi un raggio di luce parallelamente a due delle facce, e perpendicolarmente alle basi, in modo che andasse irrefratto a cadere su d'una delle facce laterali presentando il piano di polarizzazione inclinato di 45° col piano d'incidenza, talchè potesse considerarsi fatto da due raggi sovrapposti d'eguale intensità, uno polarizzato in questo piano e l'altro nel piano opposto, questo raggio dopo due riflessioni nel primo caso, tre nel secondo, quattro nel terzo uscirebbe scomposto in due raggi eguali polarizzati ad angolo retto, ma tali che la fase dell'uno precederebbe quella dell'altro di 90°.

2. Vediamo quali apparenze dovrebbe offrire la luce proveniente dalle vibrazioni simultanee dei due raggi polarizzati nel modo indicato di Fresnel, per poi paragonarle con quelle che gli esperimenti ci mostreranno.

Perciò consideriamo un atomo d'etere che si muova con velocità uniforme in un circolo *A D B E* (Fig. 76). Se decomponiamo il suo movimento in due, uno secondo il diametro *A B* l'altro secondo il diametro *E D*, rettangolari fra loro; il movimento per *A B* (1) coinciderà con quello di un'atomo che vibrasse rettilineamente secondo quest'asse, come il movimento componente per *E D* corrisponderà a quello di un atomo che vibrasse rettilineamente secondo *E D*, e fra questi due movimenti non vi sarebbe altra differenza se non che quando la vibrazione per *A B* stasse per cominciare in *A*, quella secondo *E D* sarebbe già nel mezzo e nel punto di sua massima velocità in *C*, e per lo contrario quando quella per *E D* stasse per cominciare la sua vibrazione in *D*, quella secondo *A B* sarebbe nel punto di mezzo *C* colla massima velocità; cioè queste due vibrazioni conserverebbero sempre fra loro una differenza di fase di un quarto d'ondulazione, o di 90°. Dunque viceversa conchiuderemo che se un atomo è animato alla volta da due movimenti vibratorii rettilinei ad angolo retto fra loro e differenti di un quarto di fase, o 90°, quest'atomo roterà in un circolo con velocità uniforme. Questa specie di movimento lineare in un circolo è quella che Fresnel ha chiamato *polarizzazione circolare*. I due raggi polarizzati ad angolo retto, che sortono

(1) Vedansi gli articoli 7, 8, 9 della Lezione XXVI e il n.° 3 della Nota I alla Lezione IV.

dai parallelepipedi su descritti, trovandosi appunto differire di fase, secondo le teorie di Fresnel, di 90° faranno dunque vibrare gli atomi circolarmente con velocità uniforme, ossia saranno polarizzati circolarmente.

Conviene però notare che nella composizione di queste vibrazioni, come di tutte le altre che anderemo considerando in questa Lezione, facciamo astrazione dal movimento di propagazione della luce, tenendo conto soltanto dei movimenti vibratorii in un piano. In realtà conviene immaginare che il piano stesso proceda colla velocità di propagazione della luce, così che il movimento vibratorio che si considera venga ad essere successivamente applicato all'atomo che si troverebbe sul piano mobile nel punto corrispondente in cui esiste l'atomo ideale supposto nel piano fisso. Nel caso presente è facile di concepire che il movimento vibratorio passerebbe successivamente con una velocità uniforme per tutti gli atomi disposti secondo un'elica, della quale il circolo considerato fosse la projezione della base, e la lunghezza di una delle due ondulazioni rettilinee quella del passo.

3. Paragoniamo ora i resultamenti sperimentali colle esposte conclusioni teoriche. I due movimenti rettilinei nel piano, essendo secondo due assi ad angolo retto e con fasi diverse, non sono suscettibili d'essere ridotti ad un solo movimento rettilineo, o sia ad un raggio polarizzato ordinariamente, e perciò il raggio di luce che esce dopo aver sofferto le rifrazioni suddette, dovendo considerarsi come risultante da due movimenti vibratorii rettilinei eguali e ad angolo retto, presenterà effetti simili a quelli di un raggio di luce naturale. Questo è infatti ciò che ha verificato Fresnel: analizzando con un prisma bifrangente il raggio emergente dalla base opposta del parallelepipedo osservò che non era più polarizzato come avanti l'incidenza, ma presentava due immagini eguali durante tutta la rotazione del prisma analizzante.

La luce di questo raggio non si può però confondere colla luce naturale per un altro effetto, il quale si scorge, per esempio, nel primo caso di due sole riflessioni, facendo subire allo stesso raggio due altre riflessioni interne (Fig. 77) prima che sorta, con che i due movimenti vibratorii verranno a differire di fase di 180°, o di una mezza ondulazione. Per bene intendere in che consista la differenza, fingiamo che *GF* (Fig. 78) sia il piano di polarizzazione del raggio avanti d'entrare nel vetro e facente un angolo di 45° col piano d'incidenza, e consideriamo questo raggio avanti la prima riflessione come composto di due

A B e *D E* polarizzati ad angolo retto secondo il piano d'incidenza e secondo il piano opposto. Come le loro vibrazioni sono simultanee potremo concepire che l'atomo parta da *F* con due velocità rispettivamente parallele ad *A B* e *D E*, la prima diretta da *A* verso *B*, e la seconda da *D* verso *E* per portarsi in *G*, e poi ritornare indietro colle stesse velocità di prima, ma dirette in verso contrario da *B* verso *A*, e da *E* verso *D*, con che verrebbe a restituirsi in *F* alla fine del periodo di vibrazione. Dopo quattro riflessioni il raggio componente che vibra secondo *E D* sarà in ritardo su quello che vibra secondo *A B*, per ciò che abbiamo detto, di una mezza vibrazione, così che quando l'atomo sarà in *C* e la vibrazione lungo *B A* tenderà a trasportare l'atomo verso *A*, quella lungo *D E* tenderebbe a trasportare l'atomo verso *E* in direzione opposta alla prima, e come le loro fasi si possono considerare ancora come simultanee potranno comporsi rettilineamente, ed il raggio sembrerà polarizzato nel piano passante per *H K* facente un'angolo di 45° dal lato opposto del piano d'incidenza. Fresnel ha infatti osservato che il raggio che sorte dopo quattro riflessioni dal prisma (Fig. 77) si trova polarizzato rettilineamente, ma nel piano opposto.

Questo risultamento sarebbe però diverso, se in luogo di far riflettere due volte un raggio che aveva ricevuto la polarizzazione circolare con due riflessioni precedenti, si facesse riflettere colle stesse incidenze soltanto due volte un raggio di luce naturale. Infatti questo equivalendo a due raggi eguali polarizzati a 45° uno a diritta l'altro a sinistra del piano d'incidenza, ciascuno di essi dopo due riflessioni interne a 54°. 37' diverrebbe un raggio polarizzato circolarmente, ciascuno dei quali analizzato col prisma darebbe, come abbiamo visto, due raggi uguali polarizzati in piani ad angolo retto. Come i due raggi polarizzati circolarmente devono considerarsi d'origine diversa, Lezione XXXII art. 12, i raggi polarizzati in piani paralleli che nascono dalla loro decomposizione col prisma analizzante non saranno componibili fra loro, non faranno che sovrapporsi, e si avranno ancora due immagini eguali in tutte le posizioni della sezione principale del detto prisma, ciò che è infatti quello che mostra l'esperienza.

4. Se il piano di polarizzazione del raggio che deve subire le riflessioni non facesse col piano d'incidenza un angolo semiretto, i due raggi ad angolo retto fra loro, dai quali si è considerato composto, non sarebbero più eguali, ed allora dopo due riflessioni interne sotto l'incidenza di 54° descriverebbero delle ellissi, o per dir

meglio il movimento si propagherebbe per eliche ellittiche, ed il raggio emergente analizzato non darebbe più due immagini eguali, ma dopo due altre riflessioni sotto la stessa incidenza si troverebbe ancora polarizzato ordinariamente in un piano che farebbe col piano d'incidenza un angolo eguale a quello in cui si trovava polarizzato prima d'entrare, ma dalla parte opposta. La luce che si propaga per vibrazioni lungo eliche ellittiche, si dice che ha ricevuto la *polarizzazione ellittica*.

Si dimostra pure che un raggio si trova dotato della polarizzazione ellittica ogni qual volta consta di due raggi polarizzati rettilineamente, ma con una differenza di fase che non sia un multiplo di quarti d'ondulazione.

5. I fenomeni della polarizzazione circolare od ellittica si presentano ancora facendo riflettere la luce sulle sostanze opache incapaci di polarizzare completamente la luce per riflessione, come sono le sostanze metalliche, ma con questa differenza che mentre nelle riflessioni interne nelle sostanze diafane i due raggi componenti perdono quasi nulla della loro intensità, nelle riflessioni esterne sulle sostanze metalliche l'intensità dei detti raggi diminuisce ad ogni riflessione; e quello che è polarizzto perpendicolarmente al piano d'incidenza, diminuisce in una ragione maggiore di quello che è polarizzato nello stesso piano.

Sir D. Brewster, che è il solo sperimentatore che ancora abbia fatto delle sperienze su questo oggetto, ha trovato che facendo riflettere un raggio di luce fra due lamine parallele metalliche, una sola riflessione basta per polarizzare ellitticamente la luce e due riflessioni per restituirla alla polarizzazione ordinaria; ciò che viene a dire che una sola riflessione basta onde le vibrazioni del raggio componente polarizzato nel piano d'incidenza, e l'altro polarizzato nel piano opposto differiscano di un quarto e poi di una mezza ondulazione. Impiegando delle lamine d'acciajo, e d'argento e facendo cadere il raggio sotto un' incidenza di 75° colle prime, e di 73° colle seconde il piano di polarizzazione dello stesso raggio facendo un angolo di 45° con quello d'incidenza risultò

NUMERO DELLE RIFLESSIONI *n*	INCLINAZIONI DEL PIANO, IN CUI IL RAGGIO SI TROVA POLARIZZATO ORDINARIAMENTE, COL PIANO D' INCIDENZA			
	ACCIAJO		ARGENTO	
	Angoli dei piani	Dif. dei log. delle tan. degli angoli	Angoli dei piani	Dif. dei log. delle tan. degli angoli
2	— 17°. 00'		— 38°. 15'	0,105
4	+ 5 . 82	0,515	+ 31 . 52	0,103
6	— 1 . 38	0,512	— 26 . 05	0,104
8	+ 0 . 30	0,518	+ 21 . 27	0,103
10	— 0 . 09	0,514	— 16 . 56	0,103
12	+ 0 . 03	0,523	+ 13 . 30	0,104
18	— 0 . 00	0,477	— 6 . 42	0,103
36	— 0 . 00		+ 0 . 47	0,104

La prima colonna di questa tavola indica il numero di riflessioni che si è fatto subire al raggio.

La seconda, e quarta l' angolo che fa col piano d' incidenza il piano, secondo cui si è trovato polarizzato il raggio dopo il numero corrispondente di riflessioni.

La terza e quinta colonna, che noi abbiamo aggiunto, indicano le differenze fra le tangenti dell' angolo del piano di polarizzazione prima e dopo le due ultime riflessioni sofferte.

Dall' esame di questi risultamenti sperimentali dobbiamo quindi dedurre.

1.° Che sull' acciajo dopo un numero pari di riflessioni sotto l' incidenza di 75°, e sull' argento sotto l' incidenza di 73° i due raggi componenti polarizzati nel piano d' incidenza e perpendicolarmente ad esso differiscono nelle loro fasi di mezza ondulazione, perchè non è che dopo una tale differenza che le loro fasi si possono considerare come simultanee, e quindi le vibrazioni dei due

raggi componibili in una sola vibrazione rettilinea che faccia comparire il raggio polarizzato ordinariamente.

2.° Che le vibrazioni del raggio polarizzato nel piano perpendicolare a quello d' incidenza diminuiscono più rapidamente che quelle del raggio polarizzato nel piano d' incidenza, perchè il rapporto delle lunghezze di queste vibrazioni essendo espresso dalle tangenti degli angoli di polarizzazione, questi angoli vanno sempre più diminuendo ad ogni pajo di vibrazioni.

3.° Ad ogni pajo di riflessioni successive il rapporto della diminuzione delle vibrazioni del raggio polarizzato perpendicolarmente al piano d' incidenza e di quelle del raggio polarizzato nel piano d' incidenza è costante, perchè le tangenti dei piani di polarizzazione hanno dei logaritmi che decrescono con differenze costanti, prescindendo dai piccoli errori di cui le esperienze possono essere affette, e perciò questo rapporto deve essere soltanto una funzione dell' angolo d' incidenza, e di quantità costanti dipendenti dalla natura della sostanza riflettente.

6. Sir D. Brewster ha pure cercato sotto quali altri angoli d' incidenza, e con qual numero di riflessioni si può ancora ottenere la polarizzazione ordinaria coll' acciajo, e trovò che sotto le incidenze

86° ; 84° ; 82°. 20 ; 79° ; 75° ; 67°. 40 ; 60°. 20 ; 56°. 25 ; 52°. 20

il raggio torna ad essere polarizzato ordinariamente dopo

6 5 4 3 2 3 4 5 6

riflessioni.

Alcuni geometri hanno tentato di dare delle formole per le quali si possano calcolare, conosciute che siano due costanti per ogni sostanza, tanto il valore dei suddetti angoli d' incidenza pei quali si ottiene la polarizzazione rettilinea dopo un certo numero di riflessioni, quanto il rapporto con cui diminuiscono le velocità massime di vibrazione del raggio componente polarizzato nel piano d' incidenza e quelle del raggio polarizzato nel piano opposto, di cui abbiamo parlato sopra; ma le considerazioni teoriche delle quali si sono serviti essendo complicate e non abbastanza rigorose, e gli sperimenti per provare le formole dedotte mancando ancora in sufficiente numero, ometteremo di qui produrle. Termineremo questa Lezione col dare secondo Sir D. Brewster gli angoli d' incidenza sotto i quali con due riflessioni si riconduce il raggio alla polarizzazione ordinaria, o rettilinea impiegando diverse sostanze

Nomi dei metalli	Angolo d'incidenza	Angolo dei piani dopo 2 riflessioni
Stagno fuso	78°. 30′	33°. 30′
Mercurio	78 . 07	26 . 00
Galeno	78 . 10	2 . 00
Pirite di ferro	77 . 30	14 . 00
Cobalto grigio	76 . 56	12 . 30
Metallo di specchi	76 . 00	21 . 00
Antimonio fuso	75 . 25	16 . 15
Acciajo	75 . 00	17 . 00
Bismuto	74 . 50	21 . 00
Argento puro	73 . 00	39 . 48
Zinco	72 . 30	19 . 10
Placca di stagno battuto	70 . 50	21 . 00
Oro dei gioiellieri	70 . 45	33 . 00

7. La polarizzazione circolare od ellittica si può ottenere anche per semplice rifrazione colle sostanze birifrangenti. Da quanto abbiamo esposto nella Lezione XXX art. 4 e 13 è facile di concepire che se per una lamina di solfato di calce, o di un cristallo birifrangente qualunque, le facce della quale siano parallele all'asse ottico, si fa passare perpendicolarmente un raggio di luce, polarizzato in un piano che faccia colla sezione principale del cristallo un angolo di 45°, questo si scompone in due raggi eguali polarizzati ad angolo retto che attraversano il cristallo con velocità differente. Quando la grossezza della lamina di cristallo fosse proporzionata in modo che all'uscire i due raggi si trovassero differire nelle loro fasi giusto di un quarto di ondulazione, questi due raggi non ancora separati l'uno dall'altro saranno esattamente nelle condizioni che costituiscono un solo raggio polarizzato circolarmente, il che vien confermato dall'esperienza. Siccome è assai difficile di trovare una lamina di un cristallo birifrangente che abbia appunto la grossezza richiesta, si supplisce facendo che il raggio attraversi il cristallo con una certa obliquità, che si può trovare tentando coll'inclinare il piano della lamina, girandolo intorno ad un asse perpendicolare all'asse ottico ed al piano di polarizzazione del raggio. La lamina dovendo essere assai sottile, i due raggi non si separeranno sensibilmente per questa obliquità, ma la loro differenza di cammino potrà divenire tale quale si richiede onde differiscano di un quarto d'ondulazione, il che si riconoscerà suc-

cedere, quando analizzando il raggio emergente si osserveranno costantemente due immagini eguali durante la rotazione della sezione principale del prisma analizzante.

8. Se recapitoliamo i diversi modi, con cui abbiamo composto le vibrazioni luminose, si può notare che negli articoli 11 e 12 della Lezione XXVI abbiamo composto le vibrazioni degli atomi agitati nello stesso tempo da due sistemi d' onde posti nel medesimo piano, ma non simultanee, cioè aventi fra loro una differenza di fase, ed abbiamo determinato l' ondulazione risultante.

2.° Poscia nella Lezione precedente abbiamo considerato le onde piane simultanee cioè tali, che conservino fra loro sempre la stessa fase, ma le cui vibrazioni si facevano in piani ortogonali fra loro, e ne abbiamo veduto nascere i fenomeni del movimento dei piani di polarizzazione.

3.° Finalmente in questa Lezione abbiamo composto le vibrazioni luminose che arrecano agli atomi d' etere posti in uno stesso luogo due sistemi d' onde polarizzate in piani ortogonali, e che di più non siano simultanee, ma che differiscano pure di fase ed anche di amplitudine di vibrazione, e ne sono emersi i fenomeni della polarizzazione circolare ed ellittica.

Questi tre modi di composizione delle vibrazioni sono stati eseguiti indipendentemente d' ogni altra considerazione, e solo seguendo i principii generali della meccanica, e dovevano necessariamente presentarsi in atto, se il sistema delle ondulazioni è reale; come i fenomeni ne hanno confermato i risultamenti, ciò diviene una novella prova della verità di questo sistema.

FENOMENI CROMATICI DELLA POLARIZZAZIONE

LEZIONE XXXV.

Colorazione delle lamine cristallizzate.

1. Coll' oggetto di rendere più semplici le nostre considerazioni, abbiamo, nelle precedenti Lezioni sulla doppia rifrazione e sulla polarizzazione, ragionato soltanto sulla luce omogenea, cioè quella tutta dotata d'uno stesso indice di rifrazione, o risultante da ondulazioni di eguale lunghezza. Se s' impiega della luce naturale o composta, i gradi di maggiore o minore intensità che può acquistare la luce omogenea nei fenomeni che abbiamo considerato, si succedono ad intervalli differenti pei raggi diversi a seconda del loro rispettivo indice di rifrazione, il che dà origine a varii fenomeni di separazione di colori. Come questa separazione si fa coll' intervento della luce polarizzata, questi fenomeni sono stati compresi sotto il nome di *fenomeni cromatici di polarizzazione.*

Applicheremo in questa Lezione i principii esposti alla spiegazione di alcuni di questi fenomeni di colorazione.

2. Se per esempio si riceve sotto l'incidenza di 54° luce naturale sopra una piastra di vetro della quale si sia annerita la superficie posteriore, e posta in modo che la luce riflessa polarizzata (1) sia tutta diretta orizzontalmente, osservando questa piastra attraverso una lamina di tormalina si vedrà tutta illuminata od oscura secondo che la sezione principale della tormalina sarà orizzontale o verticale (2). Ma se prima di analizzare colla tormalina la luce riflessa la facciamo passare perpendicolarmente per una sottile lamina di un cristallo birifrangente, per esempio, per una lamina di solfato di calce, di $0^{mm},5$ o $1^{mm},5$ di grossezza, colle sue facce parallele all' asse ottico, si osserva co-

(1) Lez. XXXII, art. 2, 4 e 5.
(2) Lez. XXXII, art. 6.

me il Sig. Arago notò pel primo, che questa lamina si colora, e che i suoi colori cambiano d' intensità e di specie col cambiare rispettivamente le posizioni delle sezioni principali della lamina di solfato di calce o della tormalina rispetto al piano primitivo di polarizzazione della luce. Per evitare confusione, e dar maggior generalità al discorso chiameremo lamina *interposta* la lamina di solfato di calce o d' altro cristallo birifrangente, che venga attraversata dalla luce polarizzata, e lamina o prisma *analizzante* quella di tormalina con cui si analizza la luce dopo che ha attraversato la lamina interposta.

Quando la sezione principale della lamina interposta, o quella che le è perpendicolare, è nel piano di polarizzazione primitiva, e la sezione principale della lamina di tormalina è verticale non si vedono colori, e la piastra di cristallo pare nera, come se la lamina interposta non esistesse. Ma se, partendo da questa posizione, si fa girare nel suo piano la lamina interposta tosto appare colorata, e dopo una rotazione di 45° il suo colore è al massimo grado di vivezza. Continuando la rotazione, l' intensità del colore diminuisce, e dopo un' altro ottavo di circonferenza ritorna l' oscurità. Lo stesso si ripete ad ogni quarto di rivoluzione, il colore riproducendosi però sempre di specie costante.

Supponiamo d' aver arrestato la lamina interposta nel punto della massima vivacità del colore, e che il colore apparso sia, per esempio, rosso, e facciamo invece girare la lamina analizzante: a misura che questa gira lo splendore della luce colorata diminuisce, e giunta la rotazione a 45° la luce è scolorita: al di là di 45° comincia ad apparire un verde smorto che si fa sempre più vivace sino a 90°, ove acquista il più gran splendore. Passato questo punto col continuare la rotazione il verde diminuisce e sparisce a 135°; dopo ricomparisce il rosso che aumenta sino a 180°. Continuando la rotazione della lamina analizzante per l' altra mezza circonferenza si riproducono gli stessi fenomeni che nella prima mezza circonferenza. Così mentre gira la sola lamina interposta non si vede che un solo colore, quando gira la lamina d' analisi se ne vedono due, e questi due colori sono complementari.

Non il solo rosso ed il solo verde si producono: questi colori non corrispondono che ad una certa grossezza della lamina interposta. Se si cambia successivamente la sua grossezza, i due colori di cui si tinge la lamina cambiano in tutti i modi possibili, ma si mantengono però sempre complementarii l' uno dell' altro.

Per semplicità della descrizione abbiamo supposto la lamina analizzante essere una tormalina che assorba e distrugga una delle immagini, e così non abbiamo considerato nel fenomeno che una sola immagine. Se si fa uso, per lamina analizzante, di un prisma di spato d'Islanda d'una certa grossezza, allora si vedono due immagini ad un tempo, l'immagine ordinaria e straordinaria, l'una d'un colore, l'altra del complementario; e col girare la sezione principale dello spato d'Islanda intorno ad una orizzontale, si vede che alternativamente ad ogni quarto di rivoluzione le due immagini si contraccambiano i loro colori. Se la grossezza del prisma non è di tanto che separi totalmente le due immagini, ma le lasci ancora sovrapposte in parte, si vede che nella parte sovrapposta perdono i loro colori, e formano del bianco, il che è una prova semplice sperimentale che i loro colori sono complementari.

3. Per darsi ragione di queste apparenze non abbiamo, seguendo i principii delle teoriche esposte, che a cercare l'espressione dell'intensità della luce nell'immagine ordinaria e straordinaria che escono dalla lamina analizzante. Quest'applicazione fu fatta la prima volta da Fresnel in una Memoria presentata all'Accademia delle Scienze di Parigi nel 1821, nella quale cominciò a fare spiccare la preminenza delle nuove sue teorie.

Rappresenti la Figura 79 una sezione del pennello di luce appena entrato nella lamina analizzante, avanti che i raggi ordinario e straordinario si siano sensibilmente separati. La retta $P\,P'$ rappresenti l'intersezione del piano di polarizzazione primitivo del raggio, le rette $O\,O'$, $S\,S'$ le due intersezioni della sezione principale della lamina interposta, e della sezione che le è perpendicolare, e le rette $\Omega\,\Omega'$, $\Sigma\,\Sigma'$ le sezioni analoghe della lamina analizzante.

Il raggio incidente polarizzato nel piano $P\,P'$ all'entrare nella lamina interposta si scomporrà in due, uno ordinario polarizzato secondo $O\,O'$, l'altro straordinario polarizzato secondo $S\,S'$, e chiamando a l'angolo che il piano della sezione principale $O\,O'$ fa col piano $P\,P'$ si avrà, secondo la legge di Malus (1).

$$I^2_o = I^2 \cos^2 a \qquad I^2_e = I^2 \sin^2 a.$$

I^2_o ed I^2_e ed indicando rispettivamente le intensità dei raggi ordinario e straordinario nella lamina interposta. Le velocità massime delle vibrazioni degli atomi essendo proporzionali alle radici

(1) Lez. XXXII art. 9.

delle intensità si avranno per esprimere le dette velocità degli atomi ne' due detti raggi componenti, le due formole rispettive

$$I_o = I \cos a \qquad I_e = I \sin a.$$

Se, attenendosi al principio che gli atomi vibrino perpendicolarmente ai piani di polarizzazione, supponiamo che un atomo vibrante d'etere nel raggio primitivo parta in un dato istante da C verso I, e che la sua velocità massima sia rappresentata nella Figura 79 da CI, nello stesso istante le velocità componenti I_o ed I_e saranno dirette da C verso S e da C verso O, e saranno rappresentate da CI_o, e CI_e.

Ciascuno dei due raggi che vibra colle velocità I_o ed I_e all'entrare nella lamina analizzante si scomporrà in altre due. Chiamando b l'angolo che il piano della sezione principale $\Omega\,\Omega'$ fa col piano di polarizzazione primitiva $P\,P'$, ed eseguendo sui raggi I'_o ed I'_e le decomposizioni nello stesso modo con cui si è fatta quella del raggio I', si otterranno per le velocità massime dei due raggi, ne' quali viene decomposto I'_o, le espressioni

$$(1)\ I_{o.\omega} = I\cos(b-a) = I\cos a\cos(b-a)\ ;\ (2)\ I_{o.\sigma} = I_o\sin(b-a) = I\cos a\sin(b-a)$$

e per le velocità massime dei due raggi in cui è scomposto I'_e

$$(3)\ I_{e.\omega} = -I_e\sin(b-a) = -I\sin a\sin(b-a)\ ;\ (4)\ I_{e.\sigma} = I_e\cos(b-a) = I\sin a\cos(b-a)$$

Ciascnna di qneste componenti è ottenuta moltiplicando la vibrazione risultante pel coseno dell'angolo che essa fa colla componente che si considera, e perciò abbiamo dato il segno — alla velocità $I_{e.\omega}$ perchè l'angolo che $C\,O$ fa con $C\,\Sigma$ è misurato da $\frac{\pi}{2} + b - a$ e si ha $\cos\left(\frac{\pi}{2} + b - a\right) = -\sin\,(b-a)$. Questo cambiamento di segno vuol dire che la vibrazione $I_{e.\omega}$ si fa in direzione contraria alla $I_{o.\omega}$. Infatti l'atomo d'etere, che come abbiamo visto, possiede prima della decomposizione le velocità CI_o, CI_e, Fig. 79, dirette da C verso S, e da C verso O, dopo la decomposizione potrà considerarsi avere ancora le velocità $CI_{o.\sigma}, CI_{e.\sigma}$ amendue dirette dalla stessa parte, da C verso Ω, ma le velocità $I_{o.\omega}$ ed $I_{e.\omega}$ saranno dirette nna verso Σ l'altra verso Σ', cioè in direzione opposta. La vibrazione corrispondente alle velocità $I_{e.\omega}$ sarà quindi rispetto a quella corrispondente alla velocità $I_{o.\omega}$ appulsiva, se quest'ultima è repulsiva, o viceversa, ciò che viene ad equivalere al caso, come se le due vibrazioni provenissero da due

sistemi d'onde discordanti, o differenti di una mezza ondulazione, e perciò nel caso d'interferire fra loro. Siccome questa conclusione tratta dai principii generali della decomposizione dei movimenti poteva sembrare un po' azzardata, Fresnel ha voluto verificarla sperimentalmente.

4. L'esperimento di Fresnel è analogo al seguente. Siasi introdotto in una camera oscura della luce artificiale o solare polarizzata verticalmente facendola riflettere sotto l'opportuna incidenza sopra la superficie anteriore di una lamina di vetro, della quale si sia annerita la superficie posteriore. Raccolgasi parte di questa luce con una lente piano-cilindrica il cui asse sia orizzontale, e formi sulla linea focale un filo orizzontale luminoso, dal quale la luce si dirami con raggi divergenti. Sul cammino di questi raggi pongasi un doppio romboide di spato d'Islanda, ottenuto col segare un solo romboide perpendicolarmente alle sue facce, lavorate prima in modo che siano bene piane e parallele fra loro ed all'asse ottico, e col sovrapporre poscia le due parti in guisa che l'asse ottico dell'una sia perpendicolare a quello dell'altra. Questo romboide deve essere situato colle sue facce parallele all'asse della lente e perpendicolari al piano focale della medesima, e girato in modo che la sezione principale di una delle due parti sovrapposte tagli questo piano formando un'angolo di 45° al disopra, e quindi quella dell'altra parte un'angolo di 45° al di sotto. I raggi di luce dopo aver attraversato il romboide si divideranno in due sistemi che daranno due immagini del filo luminoso formato dalla lente (Lez. XXXII; art. 1; Fig. 66, n.° 5), e benchè abbiano percorso dei cammini diversi, le lunghezze dei loro cammini si saranno compensate in modo che si troveranno eguali tanto per quelli dell'una che per quelli dell'altra immagine; la sola differenza che esisterà fra questi raggi sarà che quelli di un'immagine saranno polarizzati in un piano facente un'angolo di 45° al disopra del piano focale, mentre quelli dell'altra immagine lo saranno in un piano facente un'angolo di 45° al disotto. I raggi divergenti delle due immagini incontrandosi nello spazio saranno quindi incapaci d'interferire fra loro, siccome polarizzati ad angolo retto (Lez. XXXII, art. 7); ma se prima che s'incontrino si pone una lamina di tormalina, composta di due segmenti tratti da una sola lamina tagliata perpendicolarmente alle sue facce, poi ricongiunti a lato l'uno dell'altro in guisa che le loro sezioni principali stiano ad angolo retto fra loro, e si presenta la detta lamina in tale situazione che le sue facce siano parallele a quelle del romboide, ed una delle sue sezioni principali sia vertica-

le (1), allora i detti raggi nell'attraversarla venendo decomposti una seconda volta dal rispettivo segmento, torneranno a formare due sistemi polarizzati ad angolo retto, uno nel piano verticale, l'altro nel piano focale della lente. Il segmento di tormalina che avrà la sua sezione principale parallela a quest'ultimo non darà adito che al sistema polarizzato verticalmente, (Lez. XXXII, art. 6), l'altro che avrà la sua sezione principale posta verticalmente non darà adito che al sistema polarizzato nel piano focale della lente. I raggi del primo sistema provenienti dalle due immagini trovandosi ora condotti ad uno stesso piano di polarizzazione interferiranno fra loro, e quelli del secondo sistema verranno a fare lo stesso. (2) Si scorgeranno quindi, esplorando lo spazio al di là della lamina di tormalina, ed impiegando per una visione più distinta il sussidio di una lente, due sistemi di frange orizzontali uno in proseguimento dell'altro, ma si noterà fra loro questa differenza, che quello in cui la luce è polarizzata verticalmente presenterà nel mezzo una frangia colorata, mentre l'altro in cui è polarizzata nel piano opposto presenterà nella stessa direzione una striscia nera; e lateralmente le frange colorate dell'uno saranno in continuazione alle strisce nere dell'altro, e viceversa. Ciò vorrà dire che nei punti dello spazio dove i raggi del primo sistema s'incontrano in concordanza, quelli del secondo sistema s'incontrano invece in discordanza. Ora i cammini percorsi dai raggi d'ambedue i sistemi essendo esattamente eguali di lunghezza, questa differenza non può provenire che dalle direzioni con cui si effettuano le loro vibrazioni. Gettando gli occhi sulla figura 80 si vede che, onde le vibrazioni $I_{o.\sigma}$, $I_{e.\sigma}$ dei raggi straordinarii provenienti dalla decomposizione operata dal segmento della lamina di tormalina, il quale ha la sezione principale parallela all'asse della lente, siano concordanti, mentre quella $I_{o.\omega}$, $I_{e.\omega}$ dei raggi straordinaril provenienti dalla decomposizione che opera l'altro segmento siano discordanti, conviene che le decomposizioni delle vibrazioni $C\,I_o$, $C\,I_e$ dei raggi provenienti dalle due immagini del filo luminoso siano state effettuate colle stesse regole colle qnali si decompongono i movimenti. Questa coincidenza di modo di decomposizione, mentre parla in favore della realtà delle

(1) In luogo di una lamina di tormalina si potrebbe impiegarne anche una d'agata composta nello stesso modo. Sir D. Brewster ha trovato che le lamine d'agata danno passaggio ad un solo sistema di raggi tutti polarizzati nello stesso piano.

vibrazioni trasversali nella formazione della luce, c' insegna dunque che quando, seguendo le regole della decomposizione dei movimenti, le componenti delle vibrazioni risultano con segno negativo, devono considerarsi dirette in verso contrario, o come appartenenti a raggi differenti in fase di una mezza ondulazione.

5. Ciò posto ritorniamo all' analisi del fenomeno che consideravamo. Le vibrazioni corrispondenti alle velocità $I_{o.\sigma}$ $I_{s.\sigma}$ eseguendosi nello stesso piano $\Omega\,\Omega'$ potranno comporsi in una sola colla formola dell' articolo 11 della Lezione XXVI. Perciò si osserverà che il raggio $I_{o.\sigma}$ avendo attraversato la lamina interposta colla velocità del raggio ordinario, ed il raggio $I_{s.\sigma}$ con quella del raggio straordinario, questi due raggi differiranno fra loro di fase. Così se ε indica la grossezza della lamina interposta, λ la lunghezza di una ondulazione colla velocità del raggio ordinario, e λ' la lunghezza di una ondulazione colla velocità del raggio straordinario, i quozienti $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ ed $\frac{\varepsilon}{\lambda'}$ rappresenteranno i numeri d' ondulazioni intere, e le parti d' ondulazione che avranno fatto rispettivamente i due raggi nell' attraversare la lamina, e $2\pi\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}-\frac{\varepsilon}{\lambda'}\right)$ rappresenterà la differenza delle loro fasi. Componendo ora colle formole (2) e (4), e colla formola (6) dell' articolo 11 della Lezione sopra citata, il quadrato della velocità risultante dalle due $I_{o.\sigma}$ ed $I_{s.\sigma}$, si avrà l' espressione

$$I^2\left\{\begin{array}{l}\cos^2 a\sin^2(b-a)+\sin^2 a\cos^2(b-a)\\ +2\cos a\sin(b-a)\sin a\cos(b-a)\cos 2\pi\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}-\frac{\varepsilon}{\lambda'}\right)\end{array}\right\}$$

che, sostituendo $1-2\sin^2\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right)\varepsilon$ a $\cos 2\pi\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right)\varepsilon$, si riduce a

$$I\left\{\sin^2 b-\sin 2a\sin 2(b-a)\sin^2\pi\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right)\right\}\varepsilon.$$

Parimente le due vibrazioni nel piano $\Sigma\,\Sigma'$, le velocità massime delle quali sono $I_{o.\omega}$ ed $I_{s.\omega}$, sono riducibili ad una sola. La differenza di fasi di queste vibrazioni pel motivo che i due raggi corrispondenti hanno percorso uno la lamina interposta colla velocità del raggio ordinario, l' altro colla velocità del raggio straordinario sarà ancora data da $2\pi\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}-\frac{\varepsilon}{\lambda'}\right)$; ma oltre a questa differenza bisognerà tener presente che per avere la velocità $I_{s.\omega}$

un valor negativo ciò fa l'effetto, secondo abbiamo visto nell'articolo precedente, come se esistesse fra i detti raggi una differenza di fase di una mezza ondulazione, e perciò la differenza totale sarà $2\pi\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right)\varepsilon-\pi$, impiegando quindi le espressioni (1) e (3) considerate ora come amendue positive, per formare il quadrato della velocità risultante giusta la formola (6) dell'articolo 11 della Lezione XXVI, essa sarà data da

$$I^2\left\{\cos^2 a\cos^2(b-a)+\sin^2 a\sin^2(b-a)\right.$$
$$\left.+2\cos a\cos(b-a)\sin a\sin(b-a)\cos 2\pi\left(\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}\right)\varepsilon-\tfrac{1}{2}\right)\right\}$$

o vero, sostituendo $2\sin^2\pi\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right)\varepsilon+1$ a $\cos 2\pi\left(\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}\right)\varepsilon-\tfrac{1}{2}\right)$ e riducendo, da

$$I^2\left\{\cos^2 b+\sin 2a\sin 2(b-a)\sin^2\pi\cdot\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right)\right\}\varepsilon.$$

Siccome le lunghezze delle ondulazioni sono proporzionali alle velocità di propagazione, e queste sono in ragione inversa degli indici di rifrazione, se si chiama l la lunghezza di un'ondulazione nel vôto, si avrà

$$\lambda : l :: 1 : n \qquad ; \qquad \lambda' : l :: 1 : n';$$

n ed n' denotando gli indici di rifrazione ordinaria e straordinaria della lamina interposta. Eliminando con queste λ e λ' dalle formole precedenti, si avrà l'intensità dell'immagine straordinaria, rappresentata dal quadrato della velocità massima della rispettiva vibrazione, data da

$$\text{(I)}\qquad I^2\left\{\sin^2 b-\sin 2a\sin 2(b-a)\sin^2\pi(n-n')\frac{\varepsilon}{l}\right\};$$

e quella dell'immagine ordinaria, da

$$\text{(II)}\qquad I^2\left\{\cos^2 b+\sin 2a\sin 2(b-a)\sin^2\pi(n-n')\frac{\varepsilon}{l}\right\};$$

queste due formole rappresentano tutte le proprietà delle immagini ordinaria e straordinaria che l'esperimento descritto ci ha fatto conoscere.

6. Per applicare queste formole al calcolo delle intensità delle immagini fatte dalla luce bianca polarizzata, la quale consta di colori differenti che corrispondono ad ondulazioni di differente lunghezza, bisogna sostituire ad l, n ed n' i valori corrispondenti a ciascun

colore. I valori di l si potranno prendere dalla tavola dell'articolo 5 della Lèzione XXVIII, quelli di n ed n' dovranno essere dati per ciascuna sostanza; ma si può osservare che la dispersione del raggio ordinario differendo comunemente poco da quella del raggio straordinario, la differenza $n - n'$ potrà essere presa costante per tutti i colori. Colla sostituzione di questi valori nelle formole (I) e (II) si potranno calcolare per ciascuna specie di colore le intensità che le corrispondono nell'immagine ordinaria e straordinaria, dopo colla regola empirica di Newton (1) si potrà ottenere il color risultante di ciascuna immagine.

La varietà del colore dipenderà quindi, secondo il processo che ora abbiamo indicato, dal solo secondo termine di ciascuna delle due formole, perchè questo secondo termine è il solo che varia colla lunghezza l delle ondulazioni dei diversi colori. Ora quel secondo termine è eguale nelle espressioni (I) e (II) delle intensità di un'immagine e dell'altra, e non differisce che nel segno con cui è applicato. La riunione o sovrapposizione delle due immagini dando un'intensità risultante espressa dalla somma delle due formole (I) e (II), nella quale quel secondo termine viene a sparire, ciò ci dice che la luce che nasce dalla compenetrazione delle due immagini deve essere indipendente dalla natura dei loro colori, o sia deve essere bianca, il che infatti è ciò che ci mostrò l'esperienza, e perciò i colori delle due immagini devono essere complementarii l'uno dell'altro.

Il secondo termine delle espressioni dell'intensità delle due immagini diviene nullo indipendentemente da $\sin^2 \pi(n-n')\frac{\varepsilon}{l}$ tutte le volte che

$$\sin 2a \sin 2(b-a) = 0$$

e quindi le immagini, divenendo indipendenti dai valori di l, devono essere anche in questo caso scolorite.

Ora alla precedente equazione soddisfanno otto casi che sono dati da

$$a = 0 \quad ; \quad a = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad a = \frac{3\pi}{2} \quad ; \quad a = 2\pi$$

e

$$b = a \quad ; \quad b = \frac{\pi}{2} + a \quad ; \quad b = \frac{3\pi}{2} + a \quad ; \quad b = 2\pi + a$$

(1) Lezione XXIV art. 12.

dunque le immagini non presenteranno colori tutte le volte che la sezione principale della lamina interposta sarà parallela o perpendicolare al piano di polarizzazione primitiva, e tutte le volte che la sezione principale della lamina d'analisi sarà parallela o perpendicolare alla sezione principale della lamina interposta. L'esperimento infatti ha mostrato che vi ha disparizione di colori per le quattro suddette posizioni della lamina interposta, come per le altre quattro della lamina d'analisi.

Il secondo termine che esaminiamo sarà invece nel suo massimo valore, quello del fattore $\sin^2 \pi (n-n') \frac{\varepsilon}{l}$ rimanendo lo stesso, quando si avrà

$$\sin 2a \sin 2(b-a) = \pm 1$$

ciò che non può essere a meno che non sia separatamente,

$$\sin 2a = \pm 1 \quad ; \quad \sin 2(b-a) = \pm 1 ;$$

o sia quando a avendo uno dei seguenti valori

$$a = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad a = \frac{3\pi}{4} \quad ; \quad a = \frac{5\pi}{4} \quad ; \quad a = \frac{7\pi}{4}$$

sarà contemporaneamente $b-a$ eguale ad uno qualunque degli infrascritti

$$b-a = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad b-a = \frac{3\pi}{4} \quad ; \quad b-a = \frac{5\pi}{4} \quad ; \quad b-a = \frac{7\pi}{4}$$

o ciò che torna lo stesso

$$b = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad b = \pi \quad ; \quad b = \frac{3\pi}{2} \quad ; \quad b = 2\pi :$$

cioè le immagini saranno più intensamente colorate, per una stessa grossezza della lamina interposta, quando la sezione principale della lamina interposta farà col piano primitivo di polarizzazione un'angolo che sarà un multiplo impari di un semiretto, e la sezione principale della lamina d'analisi sarà parallela o perpendicolare a quelle della lamina interposta.

Se a, e $b-a$ sono amendue compresi nel primo o nel terzo quadrante, o amendue compresi nel secondo o nel quarto, cioè se $\sin 2a = 1$ e $\sin 2(b-a) = 1$, o vero $\sin 2a = -1$ e $\sin 2(b-a) = -1$; le espressioni (I) (II) delle intensità dell'immagine straordinaria ed ordinaria divengono nell'uno e nell'altro caso

$$(a)\ I^2 \cos^2 \pi (n-n') \frac{\varepsilon}{l} \quad ; \quad (b)\ I^2 \sin^2 \pi (n-n') \frac{\varepsilon}{l}$$

cioè i colori dell'immagine straordinaria ed ordinaria del primo caso si riprodurranno nel secondo.

Se a e $b-a$ saranno uno nel primo o terzo quadrante, e l'altro nel secondo o quarto, o viceversa; talchè sia $\sin 2a = 1$ $\sin 2(b-a) = -1$, o viceversa $\sin 2a = -1$ $\sin 2(b-a) = 1$; allora le formole (I) e (II) daranno per le intensità e colori delle immagini straordinaria ed ordinaria dei valori reciproci di quelli di prima, cioè

$$I^2 \sin^2 \pi (n-n') \frac{\varepsilon}{l} \quad ; \quad I^2 \cos^2 \pi (n-n') \frac{\varepsilon}{l}$$

ed i colori delle due immagini si permuteranno con quelli delle due precedenti. Risultamenti tutti che l'esperienza ci ha mostrato.

7. La lamina interposta, e la lamina d'analisi stando nella situazione che corrisponde alle formole (a) e (b), nella quale l'intensità delle tinte è maggiore, immaginiamo di sostituire in queste formole ad l successivamente i valori delle lunghezze delle ondulazioni, spettanti ai diversi colori. Quando l verrà ad essere di tale grandezza che $\pi (n-n') \frac{\varepsilon}{l}$ risulti un multiplo impari di un quarto di semicirconferenza, sarà

$$\cos^2 \pi (n-n') \frac{\varepsilon}{l} = \tfrac{1}{2} \quad ; \quad \sin^2 \pi (n-n') \frac{\varepsilon}{l} = \tfrac{1}{2}$$

e le formole (a) e (b) dando due valori eguali, la luce del colore corrispondente a questo valore di l verrà distribuita in eguali quantità fra le due immagini. Partendo da questo valore di l ed aumentandolo e diminuendolo si giungerà a due valori l' ed l'', per uno dei quali l'angolo $\pi (n-n') \frac{\varepsilon}{l'}$ eguaglierà un numero pari di quarti di circonferenza e per l'altro l'angolo $\pi (n-n') \frac{\varepsilon}{l''}$ eguaglierà un numero dispari di quarti di circonferenza.

Nel primo caso si avrà

$$\cos^2 \pi (n-n') \frac{\varepsilon}{l} = 1 \quad ; \quad \sin^2 \pi (n-n') \frac{\varepsilon}{l} = 0$$

dal che per mezzo delle formole (a) e (b) si scorge che l'immagine straordinaria deve contenere tutta la luce del colore corrispondente ad l', e l'immagine ordinaria deve restarne totalmente priva.

Nel secondo caso risultando viceversa

$$\cos^2 \pi (n - n') \frac{\varepsilon}{l} = 0 \quad ; \quad \sin^2 \pi (n - n') \frac{\varepsilon}{l} = 1$$

sarà l'immagine ordinaria che conterrà tutta la luce corrispondente ad l', e la straordinaria ne sarà totalmente priva.

Pei valori maggiori o minori di l', come pure pei valori maggiori o minori di l'', pei quali le variazioni degli angoli rispettivi $\pi (n - n') \frac{\varepsilon}{l'}$ e $\pi (n - n') \frac{\varepsilon}{l''}$ non eccedano un quarto di semicirconferenza, la ripartizione dei colori corrispondenti si farà in dosi ineguali. Questa ripartizione sarà favorevole all'immagine straordinaria per la prima serie di valori, e lo sarà tanto più quanto meno questi valori differiranno da l'; e sarà viceversa favorevole all'immagine ordinaria per la seconda serie di valori ed in un modo maggiore quanto più questi valori saranno vicini ad l''. L'immagine straordinaria, ed ordinaria verranno così a contenere rispetto alla luce bianca, la prima un'eccesso di colore analogo a quello di l', ed un difetto di colore analogo a quello di l'', e l'altra reciprocamente un difetto del primo colore, ed un'eccesso del secondo. La tinta che assume l'immagine straordinaria sarà quindi all'incirca l'effetto della sovrapposizione o composizione del colore corrispondente ad l', e del colore complementario di quello di l'', e viceversa la tinta dell'immagine ordinaria sarà l'effetto della sovrapposizione o composizione del colore corrispondente ad l'' e del complementario di quello di l'. Se, per caso, i valori di l' ed l'' corrispondessero a due colori complementarii, la detta sovrapposizione si farebbe con colori eguali, e le tinte delle due immagini riuscirebbero più rinvigorite.

Se la lamina interposta e la lamina d'analisi staranno nella situazione corrispondente alle formole (a') e (b') gli effetti descritti saranno reciproci, come si notò precedentemente, il colore dell'immagine straordinaria passando nell'ordinaria e viceversa.

Nel caso intermedio di un'eguale ripartizione di colore, nel quale l'angolo $\pi (n - n') \frac{\varepsilon}{l}$ è eguale ad un multiplo impari di quarti di semicirconferenza, la differenza delle fasi del raggio ordinario e straordinario risultando espressa da $2\pi (n - n') \frac{\varepsilon}{l}$, o sia da un numero intero di quarti di circonferenza, la luce del colore corrispondente ad l esce dalla lamina interposta polariz-

zata circolarmente (Lez. XXXIV, art. 2 e 3): la luce polarizzata circolarmente non interviene dunque per nulla nella produzione delle tinte delle due immagini. Nei casi estremi invece, nei quali gli angoli $\pi\ (n-n')\ \frac{\varepsilon}{l'}$ e $\pi\ (n-n')\ \frac{\varepsilon}{l''}$ sono eguali ad un numero intero di quarti di circonferenza, le differenze delle fasi del raggio ordinario e straordinario nei quali è scomposta la luce dei colori corrispondenti ad l' ed l'' si trovano espresse da $2\pi\ (n-n')\ \frac{\varepsilon}{l'}$ e $2\pi\ (n-n')\ \frac{\varepsilon}{l''}$, ed eguagliano un numero intero di mezze circonferenze. In questi casi le dette luci escono dalla lamina interposta polarizzata rettilineamente (Lez. XXXIV, art. 3) e queste luci concorrono per intero a dare alle due immagini le loro tinte particolari. Finalmente le luci dei colori compresi fra i limiti considerati escendo dalla lamina interposta divise in due raggi con una differenza di fase compresa fra un multiplo dispari ed un multiplo pari di semicirconferenze, queste luci si trovano polarizzate ellitticamente (Lez. XXXIV art. 4); e queste concorrono soltanto in parte alla formazione delle tinte delle due immagini. L'apparizione dei colori nei fenomeni che consideriamo è dunque in generale l'effetto della differenza delle fasi con cui esce la luce polarizzata in piani opposti dalla lamina interposta, e quest'effetto è prodotto in grado maggiore dalle luci di quei colori pei quali questa differenza di fase più si scosta da un multiplo impari di quarti di circonferenza, o sia da quelle luci che escono dalla lamina interposta in uno stato di polarizzazione, che più si scosta dalla circolare e s'avvicina alla rettilinea.

8. Onde quest'effetto sia sensibile conviene che la grossezza della lamina interposta sia piccola ed il valore di $(n-n')\ \frac{\varepsilon}{l}$ non contenga che un piccol numero di unità, appunto come gli anelli di Newton non sono visibili che sino ad un certo ordine corrispondente ad una piccola grossezza dell'intervallo fra i due vetri (1). Ciò proviene da che la luce che può eccitare nell'occhio sensibilmente uno stesso colore, offre una certa estensione nello spettro solare, gode quindi di diversi gradi di refrangibilità, e le corrispondono a rigore diverse lunghezze l di ondulazione. Se dando ad l tutti i valori compresi in uno stesso colore, le due

(1) Lez. XXIX art. 8.

espressioni (*a*) e (*b*) passano, per motivo del fattore $(n-n')\frac{\varepsilon}{l}$ troppo grande, per tutti i valori di cui sono suscettibili, cioè da $\pi(n-n')\frac{\varepsilon}{l}=0$ a $\pi(n-n')\frac{\varepsilon}{l}=\frac{\pi}{2}$, le somme di questi valori saranno eguali pel raggio ordinario e straordinario, la ripartizione del colore corrispondente si farà sensibilmente in egual modo, e le immagini parranno bianche.

9. È pure necessario per la produzione semplice di questi fenomeni, che la luce diretta sulla lamina interposta sia preventivamente polarizzata in un piano. Se s' impiegasse della luce naturale, questa dovrebbe considerarsi come composta di due luci polarizzate in piani opposti, ma irregolarmente differenti fra loro di fase, e perciò incapaci d' interferire (1). Bisognerebbe dunque considerare a parte le immagini prodotte dalla luce polarizzata in un piano, poi quelle della luce polarizzata nel piano opposto, e sommare le intensità delle due immagini ordinarie, e delle due straordinarie per avere l' effetto totale.

Ora supponendo che le due formole (I) e (II) siano applicate a rappresentare le intensità dell' immagine straordinaria ed ordinaria della luce polarizzata in uno dei piani, per passare alle formole, che danno le stesse intensità per la luce polarizzata preventivamente nel piano opposto, non avremo che a diminuire gli angoli *a* e *b* di $\frac{\pi}{2}$, poichè non vi è altra diversità, se non che questi angoli sono ora contati da una linea più avanzata di $\frac{\pi}{2}$ gradi, qual' è l' intersezione del nuovo piano di polarizzazione. Facendo questo cambiamento, si scorge a prima vista che l' espressione dell' intensità del raggio straordinario in questo secondo caso si cangia in quella del raggio ordinario del primo, e viceversa. La somma di queste intensità a due a due dà

$$I^2_e + I'^2_e = I^2 \sin^2 b + I^2 \cos^2 b = I^2$$
$$I^2_o + I'^2_o = I^2 \cos^2 b + I^2 \sin^2 b = I^2.$$

Si riprodurranno così le due intensità delle due luci incidenti eguali, polarizzate in piani opposti, che compongono il raggio di luce naturale, come se questo raggio avesse attraversato una sola lamina birifrangente, per cui le immagini saranno scolorite come l' esperienza fa vedere.

(1) Lez. XXXII art. 12, e Nota annessa.

LEZIONE XXXVI.

Degli anelli colorati che circondano gli assi ottici dei cristalli.

1. Degli effetti di colorazione notabili fondati sulle stesse cause, che abbiamo esposto nella Lezione precedente, si possono ottenere impiegando invece di una lamina sottile di un cristallo birifrangente un pezzo di cristallo di maggior grossezza, che la luce polarizzata attraversi con una convergenza verso l'occhio dell'osservatore, in direzioni poco discoste dagli assi ottici. Quando la luce attraversa esattamente l'asse ottico, il raggio ordinario e lo straordinario hanno la stessa velocità (1), ed al loro uscire non esiste fra loro differenza di fase, nè vi è produzione di colori: ma tosto che il raggio di luce si scosta un poco dalla direzione dell'asse ottico, i due raggi ordinario e straordinario, in cui si scompone, polarizzati in piani ad angolo retto, attraversano il cristallo con una velocità tanto più differente, quanto la loro inclinazione all'asse ottico è maggiore, sortono con una differenza di fase, ed analizzati con una lamina birifrangente danno origine a due immagini colorate. Tutte le coppie di raggi ordinari e straordinari che sortono colla stessa differenza di fase producono gli stessi colori, e come queste coppie si trovano distribuite in circoli intorno ad un punto corrispondente alla direzione del raggio visuale che passa per l'asse ottico nei cristalli ad un solo asse; o distribuite secondo delle curve, che possono considerarsi una generalizzazione della curva che Giacomo Bernoulli ha chiamato *lemniscata*, nei cristalli con due assi, ne risultino quindi in un caso o nell'altro dei circoli o delle lemniscate pinte di varii colori.

2. Un mezzo ovvio per osservare questi anelli è di far uso dell'apparecchio della figura 81 immaginato da Sir John Herschel.

Due tubi dinotati con $T T$, $T' T'$ possono girare uno dentro l'altro a sfregamento: ciascuno di questi tubi porta una lamina di tormalina $\tau \tau'$, e per mezzo della rotazione reciproca dei tubi si possono ridurre le loro sezioni principali parallele o perpendicolari fra loro, o all'inclinazione che si vuole.

$C C$ è un corto cilindro che porta una placca perforata con

(1) Lez. XXX art. 8.

un' apertura più piccola di quelle a cui sono applicate le tormaline, ed alla quale con un po' di cera si attacca il cristallo *interposto*, λ, che deve produrre gli anelli. Questo cilindro si può far girare nel suo piano internamente a sfregamento per mezzo di piccolo manico *m* che sorte da una fenditura nel tubo *T T* praticata lungo un grand' arco.

Finalmente *L* è una lente di un corto fuoco che riunisce i raggi di luce diretta proveniente da *I* nell' interno o appena al di là della lamina λ. Questi raggi prima di giungere all' occhio attraversano così la lamina in tutte le direzioni comprese nel campo di visione; un cristallo di piccole dimensioni è sufficiente per ricevere la luce così concentrata, o si può impiegare soltanto quella parte di un cristallo più grande che è più regolare; ed è impedita la visione degli oggetti esterni che potrebbe sturbare la netta percezione del fenomeno. In mancanza di una lente si può sostituire un vetro leggiermente appannato.

3. Se il cilindretto interno non ha applicato alcuna lamina interposta, il campo è illuminato od oscuro secondo che le due lamine di tormalina τ e τ' hanno le loro sezioni principali parallele o perpendicolari, ciò che, come sappiamo, proviene da che la luce è tutta polarizzata dalla prima tormalina.

Applicasi al cilindretto un cristallo birifrangente coll' asse ottico, o cogli assi ottici, nella direzione prossima dell' asse dell' istromento. Se il cristallo ha un solo asse ottico, come sarebbe una lamina di mica di Karlat, si vede apparire una serie di anelli colorati, simili a quelli di Newton fatti per riflessione colle lamine sottili (1).

Se le lamine di tormalina hanno le loro sezioni principali perpendicolari, l' apparenza è quella della figura 82, gli anelli sono attraversati da una croce nera.

Se le due sezioni principali della tormalina sono parallele, l' apparenza è quella della figura 83, gli anelli sono invece attraversati da una croce bianca, ed i colori degli anelli sono complementarii di quelli del primo caso.

Quando il cristallo ha due assi, ma che questi siano poco inclinati fra loro, come sarebbe il *nitro*, o *nitrato di potassa*, in cui gli assi ottici non fanno fra loro che un angolo di 5°, di modo che i due assi ottici amendue poco si scostano dalla direzione dell' asse dello stromento, allora invece di anelli circolari, il si-

(1) Lezione XXIX. Parte 1.ª

stema è come doppio e gli anelli prendono le forme di lemniscate come nelle figure 84, 85, 86, 87.

La figura 84 rappresenta l'aspetto degli anelli, quando il cristallo di nitro ha i suoi assi ottici nello stesso piano, od in quello perpendicolare alla sezione principale della tormalina, le cui sezioni principali si suppongono stare ad angolo retto. Al girare un poco il piano della lamina di nitro intorno all'asse dell'istromento la croce nera si rompe e prende l'aspetto della figura 85. Per una rotazione di 22° ½ si ha l'aspetto della figura 86; e per una rotazione di 45° quello della figura 87. Proseguendo la rotazione per altri 45° gradi si riproducono in ordine inverso le stesse apparenze, e per ogni quadrante si ripetono le stesse successioni di colori.

Se le sezioni principali delle due tormaline sono parallele, le apparenze degli anelli sono complementarie, vale a dire le parti degli anelli che erano nere quando gli assi delle tormaline si incrocicchiavan ad angolo retto, diventano chiare, al rosso si sostituisce il verde e così ad ogni colore succede il complementario.

4. L'analisi di questi fenomeni si fa nello stesso modo di quella che abbiamo esposto pei fenomeni precedenti; le stesse formole (I), (II) dell'articolo 5 della Lezione precedente valgono in questo caso per dare le intensità delle immagini in una data direzione, la sola diversità consiste in ciò che ora bisogna calcolare la differenza delle fasi del raggio ordinario e straordinario in altro modo.

Sia *a b c d*, figura 88, una sezione fatta perpendicolarmente alle facce del cristallo interposto, e che comprende il raggio visuale che va al punto dell'anello colorato che si vuole considerare. Questo raggio, con rigore matematico parlando, proviene dalla riunione di due che nell'interno del cristallo erano separati: ma l'inclinazione colle facce essendo assai piccola ed il cristallo poco grosso, possiamo considerare la loro separazione come insensibile, e prenderli per due raggi che hanno attraversato il cristallo nella stessa direzione. Così se si chiama i l'angolo che la loro direzione comune fa colla perpendicolare alle facce parallele del cristallo, ed ε la grossezza di questo cristallo, il cammino che amendue hanno percorso sarà espresso da $\frac{\varepsilon}{\cos i} = \varepsilon \sec i$.

Questo cammino sarà però percorso con velocità differente dal raggio ordinario, e dallo straordinario; e dette λ e λ' le lunghezze delle ondulazioni proporzionali e corrispondenti alle velocità ri-

spettive, si avrà $\frac{\varepsilon \sec i}{\lambda} - \frac{\varepsilon \sec i}{\lambda'}$ per esprimere la differenza delle fasi colle quali questi due raggi sortono dal cristallo.

Ora chiamando l la lunghezza dell'ondulazione nel vuoto, ove la velocità è supposta uno, e dinotando con v e v' la velocità di propagazione del raggio ordinario e straordinario si ha

$$1 : l :: v : \lambda \qquad 1 : l :: v' : \lambda'$$

dunque eliminando λ e λ' dall'espressione precedente della differenza di fase, questa potrà essere rappresentata da $\frac{\varepsilon \sec i}{l}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v'}\right)$.

Nella teorica della doppia rifrazione, Lezione XXXI art. 9, abbiamo visto che si ha in generale

$$\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v'^2} = \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) \sin\theta \sin\theta'$$

θ e θ' indicando gli angoli che la direzione comune dei due raggi sovrapposti nell'interno del cristallo fa cogli assi ottici.

Ora in tutti i cristalli birifrangenti conosciuti $\frac{1}{a}$ ed $\frac{1}{v}$ differendo assai poco fra loro, se si decompongono i due termini $\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v'^2}$ ed $\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}$ nei prodotti $\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'}\right)\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v'}\right)$, ed $\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)$, e si osserva che i valori di v e v' sono sempre medii fra quelli di c ed a, si scorge che potremo senza error sensibile prendere i fattori $\frac{1}{v} + \frac{1}{v'}$ ed $\frac{1}{c} + \frac{1}{a}$, che moltiplicano delle piccole differenze, come eguali fra loro, e la formola superiore si ridurrà

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v'} = \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) \sin\theta \sin\theta'.$$

Colla sostituzione di questo valore di $\frac{1}{v} - \frac{1}{v'}$, l'espressione della differenza di fase prenderà la forma $\frac{\varepsilon \sec i}{l}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) \sin\theta \sin\theta'$; e ponendo per $\frac{1}{c}$ ed $\frac{1}{a}$ gli indici corrispondenti di rifrazione n ed n', (Lez. XXXI art. 3), otterremo finalmente per la detta espressione $\frac{\varepsilon \sec i}{l}(n - n') \sin\theta \sin\theta'$.

Ora non vi è altro da fare che mettere per la differrenza delle fasi quest' espressione nelle formole (I) e (II) della Lezione precedente che, l' analisi instituita in quel caso valendo anche pel presente, le espressioni delle intensità delle immagini ordinaria e straordinaria saranno date dalle formole

$$(I)' \quad I^2_o = I^2 \cos^2 b + \sin 2a \sin 2(b-a) \sin^2 \pi \frac{\varepsilon \sec i}{l} (n-n') \sin\theta \sin\theta'$$

$$(II)' \quad I^2_e = I^2 \sin^2 b - \sin 2a \sin 2(b-a) \sin^2 \pi \frac{\varepsilon \sec i}{l} (n-n') \sin\theta \sin\theta' :$$

b rappresenterà in queste come in quelle l' angolo che la sezione principale della lamina analizzante di tormalina fa col piano di polarizzazione primitiva, a l' angolo che il piano di polarizzazione del raggio che si considera, e che forma nell' interno del cristallo cogli assi ottici gli angoli θ e θ', fa pure col piano di polarizzazione primitiva, le altre lettere avendo le significazioni date sopra.

L' angolo i è l' angolo che il raggio interno fa colla perpendicolare alle facce del cristallo; come quest' angolo è sempre piccolo, se chiamiamo i l' angolo che il raggio visuale esterno fa coll' asse dello stromento, il quale è pure perpendicolare alle dette facce, potremo nella formola

$$\sin i = \frac{\sin i}{n_{\prime}}$$

prendere per $n_{\prime}$ il valore medio $\frac{n+n'}{2}$ degli indici di rifrazione ordinaria e straordinaria.

A propriamente parlare i due raggi che produce la rifrazione di un cristallo a due assi subiscono amendue nel caso generale la rifrazione straordinaria; ma si è convenuto di chiamare raggio ordinario quello che è polarizzato nel piano che divide per metà l' angolo diedro formato dai piani che passano per la direzione del raggio, e per l' uno e per l' altro dei due assi ottici. Vedasi l' articolo 13 della Lezione XXXII.

5. Per applicare queste formole al calcolo del fenomeno, che ci occupa, dobbiamo come nel caso precedente, sostituire nel fattore

$$\sin^2 \pi \frac{\varepsilon \sec. i}{l} (n - n') \sin\theta \sin\theta' \qquad (1)$$

per l successivamente le lunghezze delle ondulazioni di ciascun

colore, e per n ed n' i corrispondenti valori degli indici di rifrazione ordinaria nelle due sezioni principali del cristallo perpendicolari al più grande ed al più piccolo asse d'elasticità, ed ottenuti i numeri proporzionali alle quantità di ciascun colore parziale, cercare la tinta risultante col cerchio di Newton.

Nei cristalli ad un solo asse, cioè dove i due assi ottici coincidono si ha $\theta = \theta'$, e la tinta di cui parliamo è costante per tutte le direzioni, in cui sec. i $\sin^2 \theta$ è costante; e come i dipende soltanto da θ, la tinta sarà eguale per tutti i raggi visuali che fanno un angolo costante coll'asse ottico, e le linee *isocromatiche* prenderanno la forma di anelli circolari, come mostrò l'esperienza.

6. Nei cristalli a due assi ottici quest'effetto avrà luogo per tutte le direzioni in cui sec. i $\sin \theta$ $\sin \theta'$ sarà costante. Se si suppongono θ e θ' piccoli in modo che si possa considerare sec. i eguale all'unità o piuttosto come costante per tutti i punti in cui il prodotto $\sin \theta$ $\sin \theta'$ è costante, e che di più i seni si possano confondere coi loro archi, si trova che la curva isocromatica, cioè in cui il prodotto $\sin \theta$ $\sin \theta'$ è costante, projettata stereograficamente sulla faccie del cristallo, e riferita alla retta che passa pei due punti di projezione degli assi ottici come asse, e coll'origine delle coordinate nel mezzo di questi due punti, è espressa dall'equazione

$$(2) \qquad (x^2 + y^2 + \omega^2)^2 - 4\,\omega^2 x^2 = \theta^2 \theta'^2$$

dove ω rappresenta la distanza della projezione di uno degli assi ottici dal punto di mezzo o dall'origine delle coordinate. Vedasi la Nota I.

Questa curva prende successivamente, pei diversi valori del prodotto $\theta\theta'$ corrispondenti alle diverse tinte, le forme rappresentate nella figura 89, che come abbiamo detto possono considerarsi come una generalizzazione della lemniscata, ond'è che Sir J. Herschel, che primo le considerò in quest'applicazione, loro applicò pure il nome di *lemniscate*.

7. Vi è però un'osservazione importante a fare. Le direzioni degli assi ottici sono date, come abbiamo esposto nella Lezione XXXI articolo 5, in funzione dei valori di a, b, c, i quali sono inversamente proporzionali agli indici di rifrazione ordinaria nelle sezioni principali fatte perpendicolarmente agli assi d'elasticità (1). Ora si trova che questi valori sono diversi pei diversi colori, per

(1) Lez. XXXI art. 3.

cui anche gli assi ottici vengono ad essere diversamente diretti per diversi colori. Sir John Herschel che il primo notò questa variabilità di direzione degli assi ottici sperimentalmente, la trovò assai forte nella soda, e nel tartrato di potassa in cui l'angolo compreso fra gli assi ottici pei raggi rossi è di 56°, e pei raggi violetti giunge a 76°. (1) In questi casi il calcolo delle tinte diviene più prolisso, ma le formole (I) (II) le somministrano sempre con facilità per una direzione data.

8. Quantunque le lemniscate dedotte nel modo esposto precedentemente diano le curve dove la tinta è dello stesso colore, l'intensità però del colore è assai differente da un punto all'altro della curva e passa per tutte le gradazioni. L'intensità della tinta dipende dalla grandezza dell'altro fattore del secondo termine delle formole (I)' (II)'', cioè da $\sin 2a \sin 2(b - a)$.

Se supponiamo come nell'esperimento descritto che la sezione principale della tormalina analizzante sia parallela al piano primitivo di polarizzazione, così che sia $b = 0$, questo fattore si riduce a $-\sin^2 2a$, e le due formole (I)' (II)' danno

$$I^2_o = I^2 \left\{ 1 - \sin^2 2a \sin^2 \left(\pi \frac{\varepsilon (n - n')}{l} \sec i \sin\theta \sin\theta' \right) \right\}$$

$$I^2_e = I^2 \sin^2 2a \sin^2 \left(\pi \frac{\varepsilon (n - n')}{l} \sec i \sin\theta \sin\theta' \right)$$

Quando la lamina analizzante sia una tormalina che non dia passaggio che al raggio polarizzato perpendicolarmente alla sezione principale, sarà solo il valore di I_e^2 che ci darà le tinte delle immagini.

Tutte le volte che a sarà eguale, l'intensità della tinta sarà una stessa frazione dell'intensità massima corrispondente della tinta risultante calcolata sopra colla formola (1).

Ora a dinota l'angolo che il piano di polarizzazione del raggio, che si considera come ordinario, fa col piano di polarizzazione primitiva, e quest'angolo è variabile colla direzione del raggio visuale corrispondente ai diversi punti della lemniscata che si considera. Assumendo la legge citata all'articolo 13 della Lezione XXXII che il piano di polarizzazione del raggio ordinario tagli per metà l'angolo fatto dai due archi θ e θ', e continuando a supporre questi archi piccoli, la projezione stereografica sulla faccia del cristallo, dei punti dove passano i raggi, pei quali l'angolo a

(1) Mem. Camb. Phil. Soc. vol. I.

è costante, forma una curva che ha per equazione

(3) $(y^2 - x^2 \tan^2 \varpi)(y^2 - x^2 \cot^2 \varpi) + 2\omega^2 (y^2 - x^2) + \omega^4 = 0$

dove ϖ dinota l'angolo che il piano LM di polarizzazione del raggio ordinario che passa per un dato punto L della curva fa col piano della sezione principale media OO' del cristallo, condotta pei due assi ottici. Chiamando β l'angolo che questa sezione fa col piano PP di polarizzazione primitiva, si ha $a = \beta + \varpi$. Vedasi la figura 90, e la Nota II.

Se si fa, per esempio, nella formola che dà l'immagine ordinaria

$$a = 0\ ,\quad \text{o vero}\ a = \frac{\pi}{2}$$

l'intensità della sua luce diviene nulla, e tutti i punti pei quali a avrà uno dei detti valori sembreranno neri. Ora supposto, come nei due casi estremi dell'esperimento descritto nell'articolo 3, che sia da principio $\beta = 0$, e poi alla fine $\beta = \frac{\pi}{4}$ avremo per questi valori di a e di β; nel primo caso di $\beta = 0$,

$$\varpi = 0 \quad , \quad \varpi = \frac{\pi}{2};$$

e nel secondo, di $\beta = \frac{\pi}{2}$;

$$\varpi = -\frac{\pi}{4} \quad , \quad \varpi = \frac{\pi}{4};$$

l' equazione (6) si ridurrà nel primo caso ad

$$y^2 x^2 = 0\ ,$$

che dà

$$y = 0 \quad , \quad x = 0$$

e perciò l'asse delle x e l'asse delle y, o sia la linea retta su cui si progettano i due assi ottici, e la sua perpendicolare sembreranno oscure, e formeranno la croce di cui abbiamo parlato.

Nel secondo caso la stessa equazione (3) si ridurrà a

$$y^2 - x^2 = -\omega^2$$

e rappresenterà un'iperbola equilatera, il cui semiasse transverso sarà ω, cioè la metà della distanza fra le due projezioni degli assi

ottici, così la curva oscura, in cui si trasforma la croce quando il cristallo di polarizzazione è stato girato per un angolo semiretto, è un'iperbola equilatera.

Negli altri casi intermedii i due rami oscuri appartengono in generale ad una curva di quart'ordine che passa costantemente per le projezioni dei due assi ottici, ed ha per asintoti due rette, l'una delle quali fa un angolo ϖ, l'altra un angolo $\frac{\pi}{2} - \varpi$ coll'asse delle x.

9. Supponendo d'aver tracciato le lemniscate isocromatiche si possono segnare su di esse i punti d'eguale intensità di colore, tagliando dal punto di mezzo delle projezioni dei due assi ottici, cioè origine delle coordinate, come centro con un'apertura di compasso eguale ad

$$r = \sqrt[4]{\omega^4 + 2\,\omega^2\,\theta\theta' \cos 2\,\varpi + \theta^2\,\theta'^2}.$$

quattro punti, a due a due diametralmente opposti, i due primi corrispondenti al valore di r che risulta ponendo $\varpi = a - \beta$., e gli altri due ponendo $\varpi = \left(\frac{\pi}{2} - a\right) - \beta$. Vedasi la nota II.

10. Quando la sezione principale della tormalina analizzante è perpendicolare al piano primitivo di polarizzazione, cioè quando i due assi delle tormaline sono paralleli, si ha $b = \frac{\pi}{2}$, e le formole (I)' (II)'' danno

$$I^2_o = I^2 \sin^2 2\,a \sin^2 \left(\pi \frac{\varepsilon(n-n')}{l} \sec i \sin\theta \sin\theta'\right)$$

$$I^2_e = I^2 \left\{ 1 - \sin^2 2\,a \sin^2 \left(\pi \frac{\varepsilon(n-n')}{l} \sec i \sin\theta \sin\theta'\right)\right\}$$

dal che si vede che l'espressione I_e^2 del raggio straordinario, che è il solo che ci dipinge il fenomeno, quando la lamina analizzante sia una tormalina, è giusto il complemento dell'espressione del raggio I_e^2 che corrisponde al caso in cui gli assi delle tormaline sono ad angolo retto, onde tutte le immagini devono essere complementarie di quelle che abbiamo considerato nel primo caso, ciò che è pure conforme al risultato delle esperienze che abbiamo sopra riferito.

11. Nella maggior parte dei cristalli a due assi la loro divergenza è troppo grande per poter vedere simultaneamente il doppio sistema d'anelli. Allora lavorando due facce del cristallo perpendicolare ad un solo dei due assi ottici, e situando quest'asse pa-

rallelamente a quello dell' apparecchio, le formole suddette saranno applicabili al calcolo delle apparenze che presenta la metà visibile del sistema d'anelli. L'applicazione delle stesse formole a tutti i casi è ovvia, senza che ci distendiamo di più su questo argomento. È mirabile il vedere come questa teorica delle ondulazioni della luce che Young e Fresnel hanno sviluppato, abbracci in se la spiegazione di tanti fenomeni, a primo aspetto, dissimili fra loro.

LEZIONE XXXVII.

Dei fenomeni cromatici prodotti dalla polarizzazione circolare.

1. I fenomeni degli anelli colorati che si osservano col frapporre un cristallo birifrangente fra due lamine di tormalina, una polarizzante la luce, l'altra analizzante, che abbiamo descritto nella Lezione precedente, presentano un'anomalia allorchè s'impiega per cristallo birifrangente una lamina di quarzo, o come comunemente si chiama, di cristal di rocca. Il Sig. Arago che primo fece nota questa singolarità (1) osservò che nel luogo della croce nera di mezzo che si osserva negli altri cristalli, quando le sezioni principali delle due lamine di tormalina sono ad angolo retto, appare in vece un cerchio d' un colore uniforme, che si estende in parte sul luogo che dovrebbero occupar gli anelli, che il colore del cerchio non cambia col dare alla lamina del cristallo un movimento di rotazione intorno al proprio asse, purchè le tormaline rimangano colle loro sezioni principali nelle stesse posizioni rispettive, ma che è diverso secondo la grossezza della lamina del cristallo.

Se invece di tener ferme le tormaline si fa girare la sezione principale di una rispettivamente a quella dell'altra, il colore del cerchio di mezzo viene a cambiare, e passa successivamente per tutte le tinte dello spettro prismatico.

Il vedersi la luce nel mezzo degli anelli quando le due tormaline, quella polarizzante la luce incidente, e quella analizzante la luce emergente, hanno i loro assi ad angolo retto prova che il raggio di luce, nell'attraversare lungo l'asse ottico il cristallo intermedio, ha cambiato il suo piano di polarizzazione, e l'apparire quella luce di un certo colore mostra che il raggio non è più unico, ma si è diviso in parti che escono dal cristallo polarizzate in piani diversi. Ambedue questi accidenti dimostrano una singolarità del cristallo di rocca, poichè sappiamo che nei cristalli ad un solo asse il raggio ordinario e straordinario percorrono l'asse ottico colla stessa velocità (2), hanno quindi nell'emergere la stessa fase, e danno un raggio unico polarizzato nello stesso piano, in cui lo era il raggio incidente.

(1) Mémoires de l'Académie des sciences, an 1811.
(2) Lezione XXX art. 8.

2. Il Sig. Biot fu il primo che intraprese a studiare con metodo le leggi che segue un raggio di luce che percorre l'asse ottico di un cristallo di quarzo colle sue facce d'incidenza ed emergenza perpendicolari allo stesso asse (1). Per quest'oggetto egli impiegò primieramente della luce semplice o d'uno stesso colore, ed osservò qual era il piano, in cui usciva polarizzato un raggio di luce semplice, che prima di entrare nel cristallo si trovava polarizzato in un dato piano. Egli trovò che avveniva infatti un cambiamento nel piano di polarizzazione, e che questo cambiamento era progressivo e proporzionale alla grossezza del cristallo. Osservando i raggi rossi, che avevano attraversato un vetro di questo colore, trovò che, per una lamina di quarzo della grossezza di un millimetro, la rotazione del piano di polarizzazione intorno all'asse del cristallo era di 18°.25', vale a dire il piano di polarizzazione del raggio emergente si trovava inclinato sul piano di polarizzazione primitiva, o del raggio incidente, di un'angolo di 18°. 25'. Aumentando o diminuendo la grossezza del cristallo l'angolo cresceva o diminuiva nel rapporto della grossezza del cristallo, espressa in millimetri, all'unità.

Una circostanza particolare da notarsi è, che la rotazione del piano di polarizzazione non si fa sempre nello stesso verso: per alcuni pezzi di quarzo il piano gira da sinistra a destra dell'osservatore, per altri da destra a sinistra. Ma sia che il piano di polarizzazione ruoti nell'uno o nell'altro verso, alla stessa grossezza di cristallo ed allo stesso colore corrisponde prossimamente sempre un'angolo di rotazione della stessa grandezza.

3. In seguito il Sig. Biot paragonò la rotazione del piano di polarizzazione del color rosso a quella degli altri colori, ed in ciò pure scoprì una legge molto interessante. Egli trovò che gli angoli di rotazione erano più grandi pei colori più refrangibili, e variavano prossimamente nella ragione inversa dei quadrati degli accessi rispettivi di Newton, o della grandezza delle rispettive ondulazioni dei colori impiegati. La lunghezza dell'ondulazione del raggio rosso impiegato nel determinare la rotazione data precedentemente di 18°. 25' era di $0^{mm},00628$; quindi secondo la legge suddetta la formola per ottenere l'angolo A_c di rotazione del piano di polarizzazione per un colore, la cui lunghezza d'ondulazione sia l_c, sarà

$$A_c = 18°. 25'. \frac{(0^{mm},00628)^2}{l_c^2}.$$

(1) Mémoires de l'Académie des sciences pour les années 1812, e 1817.

Impiegando i valori di l_c dati nella tavola dell'articolo 5 della Lezione XXVIII si ottengono per le rotazioni dei colori prismatici i valori rispettivi notati nella seguente tavola.

Archi di rotazione dei diversi colori semplici attraverso un millimetro di cristallo di rocca.

DESCRIZIONE DEL COLORE DEL RAGGIO	ARCO di rotazione in gradi e minuti
Rosso estremo	17°. 30′
Limite del rosso ed aranciato. . . .	20 . 29
dell'aranciato e del giallo . .	22 . 19
del giallo e del verde . . .	25 . 40
del verde e dell'azzurro. . .	30 . 03
dell'azzurro e dell'indaco . .	34 . 43
dell'indaco e del violetto . .	37 . 41
Violetto estremo	44 . 05

Le esperienze eseguite hanno confermato questi risultati del calcolo.

4. Fresnel immaginò come si può meccanicamente interpretare che queste rotazioni dei piani di polarizzazione succedano in modo da produrre i fenomeni secondo le leggi trovate. Egli cominciò dall'osservare che le vibrazioni degli atomi d'etere di un raggio polarizzato rettilineamente possono sempre considerarsi come risultanti da due vibrazioni circolari fatte in verso opposto. Sia *a b c d*, fig. 90, la circonferenza secondo la quale si fanno le vibrazioni circolari; l'atomo in *a* venendo animato contemporaneamente da due movimenti, uno secondo la circonferenza da *a* verso *c*, e l'altro secondo la stessa circonferenza, ma da *a* verso *d*, descriverà evidentemente

il diametro *a b*, poichè i movimenti componenti paralleli al diametro *c d* si distruggono vicendevolmente come opposti. La direzione del movimento vibratorio rettilineo risultante dai due movimenti circolari sarà sempre quella del diametro condotto pel punto della circonferenza in cui si trova l'atomo al momento che viene investito dai due movimenti circolari.

Se i due movimenti circolari rimanessero costantemente eguali, e propagandosi avanzassero amendue colla stessa velocità, i diametri *a b* che descriverebbero i diversi atomi si troverebbero tutti paralleli fra loro, ed il piano di polarizzazione del raggio resterebbe invariabile: ma se, come concepì Fresnel, i due movimenti circolari, compiendo le loro rivoluzioni in egual tempo, si propagassero però con velocità diverse, quello che impiegasse maggior tempo ad arrivare ad una distanza data avrebbe percorso un'arco maggiore della sua circonferenza di quello che impiegasse minor tempo per arrivare alla stessa distanza. Gli atomi, che successivamente comincerebbero ad essere investiti da questi due movimenti, si troverebbero quindi su di un punto della circonferenza sempre più avanzato dalla parte di quello dei movimenti che procede più lentamente, ed il diametro *e f*, secondo cui verrà a vibrare rettilineamente ciascuno di essi, roterà da sinistra a destra, o da destra a sinistra dell'osservatore, secondo che il movimento che si propaga più lentamente sarà quello che fa circolare l'atomo verso la destra o verso la sinistra. Più la differenza delle due velocità di propagazione sarà grande più veloce sarà la rotazione del diametro secondo cui le vibrazioni si faranno, e queste due quantità cresceranno proporzionalmente l'una all'altra.

Quando il raggio verrà ad uscire dal cristallo, i movimenti circolari con differenza di velocità di propagazione venendo a cessare, gli atomi continueranno a vibrare nell'aria rettilineamente secondo le direzioni che aveva l'ultimo diametro *e f*, ed il raggio parrà polarizzato perpendicolarmente a questo diametro. Il modo di concepire di Fresnel ci spiega adunque come il piano di polarizzazione circoli, e l'arco di rotazione cresca proporzionalmente alla grossezza del cristallo, e ci dice che la differenza di velocità di propagazione dei due movimeuti circolari è in ragione inversa dei quadrati delle lunghezze delle ondulazioni dei diversi colori, poichè in questa ragione cresce l'arco di rotazione del piano di polarizzazione dei diversi colori per una stessa grossezza del cristallo. Vedasi la Nota I.

5. Onde questo modo d'interpretare il fenomeno fosse ammesso conveniva provare che effettivamente il raggio che penetra

in un cristallo di rocca viene diviso in due polarizzati circolarmente che si propagano con velocità differenti. Questa prova è stata ottenuta da Fresnel col seguente ingegnoso esperimento. Fece tagliare tre prismi di cristal di rocca, Fig. 91, $P'\pi P$, $P'PP''$, $P''\varpi P$ colle loro facce πP, $P'P''$, $P\varpi$ rispettivamente parallele all'asse ottico di ciascuno, e tali che sovrapposti nel modo che indica la figura formassero un parallelepipedo rettangolare. Il prisma di mezzo era fatto di un pezzo di cristallo di rocca che faceva rotare il piano di polarizzazione da destra a sinistra, e quelli sovrapposti imprimevano invece al piano di polarizzazione del raggio una rotazione da sinistra a destra. Un raggio di luce polarizzato rettilineamente che entrasse perpendicolarmente per la faccia $P'\pi$ del prisma deve secondo il concetto di Fresnel decomporsi in due polarizzati circolarmente, ma quello polarizzato circolarmente a sinistra deve essere dotato di una propagazione più veloce di quello polarizzato circolarmente a destra. Giunto alla faccia $P'P$, la sua velocità di propagazione deve divenire minore, e poi ritornare maggiore al penetrare nell'ultimo prisma per la faccia PP''. Viceversa deve succedere dell'altro raggio. Questi raggi incontrando le facce $P'P$, PP'' sotto delle incidenze oblique dovranno, per motivo del cangiamento della loro velocità di propagazione (1), rifrangersi, e come le variazioni delle velocità sono inverse nei due raggi, le rifrazioni si dovranno fare in verso opposto; quando uno s'avvicinerà alla perpendicolare della faccia del cristallo, l'altro si allontanerà, e viceversa come mostra la figura. I due raggi anderanno così ad ogni rifrazione separandosi sempre più, ed all'uscire dalla faccia $P''\varpi$ saranno abbastanza allontanati l'uno dall'altro da potersi esaminare separatamente. Tutto questo deve succedere, disse Fresnel, se il mio concetto è giusto.

Fatto l'esperimento Fresnel vide infatti che i raggi emergenti del prisma erano due distinti e separati; analizzando con una lamina di spato d'Islanda, colle sue facce parallele all'asse ottico, i due raggi separatamente, trovò che ciascuno dava due immagini eguali, cioè che ciascuno era decomponibile in due raggi polarizzati rettilineamente, ciò che, come abbiamo visto all'articolo 3 della Lezione XXXIV, è il carattere della luce polarizzata circolarmente. Ma come questa proprietà appartiene anche alla luce naturale bisognava sottoporla al criterio che fa distinguere la luce

(1) Lez. XXVII, art. 5.

naturale dalla luce polarizzata circolarmente. Questo criterio, come è stato esposto nel citato articolo, consiste nel far riflettere il raggio sulle superficie interne di un prisma di cristallo comune per due volte sotto l'angolo di incidenza di 54.° Se il raggio di luce è polarizzato circolarmente deve escire dal prisma polarizzato rettilineamente, ed analizzato con una lamina di tormalina deve apparire oscuro quando girando la tormalina sopra se stesso il piano della sua sezione principale diverrà parallelo al piano di polarizzazione del raggio. Ora questo è ciò che Fresnel ha verificato che succede di fatto. Il concetto di Fresnel è dunque l'espressione veridica della causa che produce il fenomeno.

6. È facile per mezzo delle leggi sopra enunciate, e delle regole esposte nelle precedenti Lezioni di calcolare quale sarà il colore che si vedrà nel centro dell'immagine, quando sia data la grossezza del cristallo di quarzo interposto, e la situazione rispettiva delle sezioni principali delle due lamine di tormalina.

Sia a l'angolo che la sezione principale della lamina analizzante fa colla sezione principale della lamina polarizzante di tormalina, ε la grossezza del cristallo ed A_c l'angolo di rotazione del piano di polarizzazione corrispondente ad un dato colore, ed alla grossezza di un millimetro di quarzo, come vien dato dalla tavola dell' articolo 3. Con queste denominazioni, osservando che il raggio che attraversa la lamina polarizzante di tormalina fa un angolo $\frac{\pi}{2}$ colla sezione principale di questa lamina, si avrà $\frac{\pi}{2} + \varepsilon A_c$ per l'angolo del piano di polarizzazione del raggio emergente dal cristallo di rocca, e sottraendo da quest' angolo l'angolo a che la sezione principale della lamina analizzante di tormalina fa colla sezione principale della lamina polarizzante, si avrà $\frac{\pi}{2} + \varepsilon A_c - a$ per l'angolo che il piano di polarizzazione del raggio emergente dal cristallo di quarzo all'entrare nella lamina analizzante di tormalina fa colla sezione principale della medesima. Decomponendo ora questo raggio in due polarizzati, uno parallelamente alla sezione principale di questa lamina, l'altro perpendicolarmente, e dinotando coll' unità l' intensità totale del raggio decomposto, si avranno quelle dei raggi componenti colle formole (Lez. XXXII art. 9)

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon A_c - a\right) \quad ; \quad \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon A_c - a\right)$$

o vero ponendo per A_e il valore dato dalla formola (1) dell'articolo 3, e sostituendo all'angolo il complemento colle seguenti

$$\sin^2\left(a - \frac{\varepsilon\alpha}{l^2_e}\right) \quad ; \quad \cos^2\left(a - \frac{\varepsilon\alpha}{l^2_e}\right)$$

nelle quali α sta pel numero 18.° 25' $\times$ (0,00628)^2. Nel far uso di queste formole si noterà che a ed A_e sono due angoli contati nello stesso verso, si prenderà dunque l'angolo a alla diritta od alla sinistra della sezione principale della lamina polarizzante, secondo che la rotazione del piano di polarizzazione girerà nell'uno o nell'altro verso.

Dando ad l_e successivamente i valori corrispondenti alle ondulazioni dei colori prismatici, il secondo valore che rappresenta l'intensità del raggio visibile, quello che solo può traversare la lamina analizzante di tormalina, farà conoscere le intensità delle immagini corrispondenti; indi colla regola del cerchio cromatico di Newton si otterrà il colore composto che risulta dalla sovrapposizione di tutte le immagini dei colori semplici. Il Sig. Biot ha verificato nelle citate Memorie la corrispondenza del colore ottenuto in questo modo con quello osservato in un gran numero d'esperimenti.

7. Il potere di dividere un raggio incidente polarizzato rettilineamente in due polarizzati circolarmente e che si propagano con velocità diverse, non appartiene al solo quarzo, nè è invariabilmente dipendente dalla cristallizzazione. Il Sig. Biot ha trovato che alcuni liquidi come gli olii essenziali di terebintina, e di cedro, le dissoluzioni di canfora nell'alcool, lo sciroppo di zucchero danno al piano di polarizzazione di un raggio che li traversa un movimento di rotazione come il quarzo. La sola differenza consiste nel grado; l'olio di terebintina, per far rotare il piano di polarizzazione di un angolo eguale a quello che lo farebbe rotare una lamina di quarzo, esige una grossezza 69 volte più grande; l'olio di cedro uno grossezza 39 volte maggiore. L'olio di terebintina fa rotare il piano di polarizzazione del raggio da diritta a sinistra dell'osservatore che lo riceve, l'olio di cedro invece da sinistra a destra. Questi olii non alterano il loro potere col venire diluiti con altri liquidi che non siano dotati della stessa facoltà; se la colonna del liquido composto che attraversano è lunga in modo che contenga ancora una stessa quantità del liquido attivo, il piano di polarizzazione ruota d'un angolo eguale. Questo loro potere non è neppure alterato convertendo i liquidi in vapori, o combinandoli chimicamente con altre sostanze: così il potere rotatorio appar-

tiene anche alla canfora, che è una combinazione d'essenza di terebintina coll'acido idroclorico, nella proporzione della terebintina che vi è contenuta. Se si mescolano due liquidi, i cui poteri rotatorii siano in verso opposto, la rotazione è eguale alla differenza delle rotazioni speciali che ciascuno dei due liquidi avrebbe prodotto separatamente. Da tutto ciò Biot pare conchiudesse, che il potere rotatorio è inerente alle molecole, e la rotazione proporzionale al numero delle molecole che il raggio traversa. Ciò non ostante pare che anche la cristallizzazione possa conferire il detto potere alle sostanze, perchè il quarzo sciolto colla potassa non possede più, come osservarono Sir J. Herschel, e Sir D. Brewster, il potere di prima; e Sir J. Herschel fece l'osservazione che tutti quei cristalli di rocca che offrono sulle loro facce delle faccette secondarie più piccole, e che perciò si chiamano *plagedrè*, e la cui direzione è obliqua agli spigoli del cristallo, il verso della rotazione del piano di polarizzazione del raggio è quasi sempre determinato dalla direzione delle dette faccette.

Sir D. Brewster ha riconosciuto che i bei colori che spiega l'amatista, od il quarzo violetto, dipendono dalla sua struttura interna, perchè sono dovuti a ciò che questo cristallo è composto di strati successivi che fanno rotare alternativamente a sinistra ed a destra il piano di polarizzazione di luce incidente. Questi fenomeni della rotazione del piano di polarizzazione forniscono anche un metodo d'analisi per riconoscere la natura chimica di diverse sostanze composte, non che un mezzo di altre utili applicazioni, per la cognizione delle quali possono vedersi le Memorie che il Sig. Biot ha pubblicato nei Tomi XV e XVI della R. Accademia delle Scienze di Parigi.

STROMENTI OTTICI

LEZIONE XXXVIII.

Specchi e Lenti.

1. La parte dell'Ottica, che abbiamo esposto fin'ora, può chiamarsi Ottica fisica, perchè è diretta a farci conoscere le leggi primitive dei fenomeni della luce: la parte dell'Ottica della quale andiamo ora a dare una succinta idea è puramente matematica, perchè, assunte le leggi già verificate, dà per mezzo di semplici considerazioni matematiche la spiegazione del modo con cui gli stromenti ottici producono i loro mirabili effetti.

Per procedere a queste considerazioni con metodo conviene che premettiamo alcuni principii sulla visione.

Le superficie dei corpi luminosi, od illuminati, devono considerarsi come il luogo di tanti centri, da ciascuno dei quali emanano tanti raggi che si propagano tutt'all'intorno nello spazio.

1.° Ogni punto di questa superficie diviene visibile direttamente per mezzo dei raggi che compongono un cono, il cui vertice è nel punto luminoso, e la cui base è sulla pupilla dell'occhio.

2.° Affinchè la visione del punto sia distinta conviene che i raggi costituenti questo cono siano ben poco divergenti: la distinzione per un'occhio ben conformato già esiste quando la divergenza dei raggi sia di 30', ed è massima se i raggi divengono sensibilmente paralleli.

3.° Il punto è visto dall'occhio nella direzione dell'asse del cono, se i raggi sono divergenti, o del cilindro se i raggi si considerano paralleli; ed è necessario per la visione che l'occhio riceva più raggi componenti uno stesso cono, o che si possano considerare partire da uno stesso centro.

Specchi piani.

2. Sia SS uno specchio piano. Noi sappiamo per la legge della riflessione, che abbiamo esposto all'art. 8 della Lezione

XXIII, che un raggio PI, fig. 92, che parte dal punto P e va a cadere nel punto I dello specchio, è riflesso secondo IO facendo colla perpendicolare Ii e nel piano d'incidenza, l'angolo PIi eguale a iIO.

Se invece di un solo raggio si immaginano più raggi formanti un cono, il cui vertice sia in P, ed i cui punti d'incidenza siano I, I_1, I_2, I_3 ec.; questi saranno tutti riflessi in modo che dopo la riflessione formeranno la continuazione di un cono che avesse il vertice sulla perpendicolare allo specchio $P\Sigma$ e ad una distanza $\Sigma\Pi$ eguale a ΣP. Ciò è facile di dimostrarsi.

Se avanti allo specchio si trova adunque un occhio ad una certa distanza, per cui i raggi provenienti da $II_1I_2I_3$ possano considerarsi sensibilmente paralleli, l'occhio riceverà questi raggi come se fossero provenienti dal centro Π, e come l'occhio giudica l'immagine del punto nella direzione dell'asse del cono formato dai raggi, vedrà un punto luminoso nella direzione $O\Pi$.

Se in luogo di un sol punto P vi saranno più punti consecutivi che fra tutti formino la superficie di un corpo luminoso od illuminato, ripetendo per ciascun punto il ragionamento che abbiamo fatto sul punto P, si vedrà che l'occhio giudicherà che al di là dello specchio esistono altrettanti punti luminosi, quanti ne ha l'oggetto, e tutti disposti pel di dietro ad eguale distanza e nello stesso ordine come quelli dell'oggetto lo sono per lo avanti. La serie di tutti questi punti visibili costituirà così un'altra immagine del tutto simile all'oggetto, e nella stessa situazione, rispetto alla superficie posteriore dello specchio, nella quale stà l'oggetto rispetto alla superficie anteriore. Da questa proprietà si deduce una regola facile per costruire l'immagine di un corpo visto in uno specchio piano. Da tutti i punti dell'oggetto s'abbassino delle perpendicolari sullo specchio; prolungando le lunghezze di queste perpendicolari d'altrettanto dietro lo specchio le loro estremità tracceranno l'immagine.

Se l'oggetto facesse collo specchio un angolo di 45°, un'altro angolo di 45° farebbe l'immagine colla parte posteriore dello specchio, l'oggetto e l'immagine sembrerebbero dunque poste ad angolo retto fra loro. Fig. 93.

Specchi sferici.

3. Gli specchi, che l'arte può con maggior grado di perfezione eseguire, e che sono di maggior uso nella costruzione degli stro-

menti ottici, sono piccoli segmenti di superficie sferiche, per cui si chiamano *specchi sferici.*

La retta che può concepirsi condotta pel centro di grandezza C del segmento, fig. 94, e pel centro K della sfera, di cui il segmento è parte, chiamasi *asse principale.*

Un raggio che parte da un punto luminoso L situato sull' asse principale alla distanza D dal centro C, e nella direzione dell' asse è riflesso lungo l' asse stesso; ma se il raggio parte obliquamente all' asse e va a cadere su di un punto I dello specchio non molto lontano da C, allora essendo riflesso indietro, facendo l' angolo d' incidenza eguale all' angolo di riflessione, va ad intersecare l' asse in un punto Λ ad una distanza Δ da C tale, che, se si chiama ρ il raggio KC della sfera di cui lo specchio è un segmento, si ha sempre la relazione, vedasi la Nota 1,

$$(1) \qquad \frac{1}{D} + \frac{1}{\Delta} = \frac{2}{\rho}.$$

Questa formola, essendo indipendente dalla distanza dal centro C al punto I su cui cade il raggio, ci mostra che tutti i raggi che partono da un punto L, con una piccola obliquità, sono tutti riflessi in modo che passano per un' altro punto Λ dell' asse. I due punti L e Λ si chiamano i *fuochi conjugati*, e le distanze D e Δ le *distanze conjugate.*

Infatti i raggi che partono dal punto luminoso L vanno tutti a riunirsi in Λ, e viceversa se si suppone il punto luminoso in Λ, la stessa formola ci mostra, che tutti i suoi raggi poco inclinati all' asse anderanno a riunirsi in L. È una proprietà generale nell' ottica, che i raggi di luce che seguono una via, la percorrono in verso contrario, quando la direzione della loro propagazione è opposta.

4. Il caso più notabile è quello, quando i raggi incidenti sono tutti paralleli all' asse; in questo caso bisogna supporre che la distanza D del punto L è infinita, e la formula ci dà

$$(2) \qquad \Delta = \frac{\rho}{2};$$

così i raggi che vengono parallelamente all' asse, vanno tutti a concentrarsi in un punto sullo stesso asse, distante dal centro C della metà del raggio della sfera, di cui lo specchio è un segmento. Il punto Λ in questo caso prende il nome di *fuoco principale*, e la distanza Δ quello di *distanza focale principale*, ed indicandola

con F, la formola (1) diviene

$$(1)' \quad \frac{1}{D} + \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{F};$$

per farsi un'idea dell'andamento, con cui le distanze conjugate variano fra loro, ad imitazione di ciò che fu fatto da altri, risolviamo l'equazione rapporto a Δ, ciò che dà

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{F} - \frac{1}{D};$$

e dando diversi valori a D determiniamo i corrispondenti valori di Δ. Eccone un prospetto.

$$D = \infty, \quad \Delta = F.$$

$$D = 100\, F, \quad \Delta = \frac{99}{100} F.$$

$$D = 2F, \quad \Delta = 2F.$$

$$D = F, \quad \Delta = \infty.$$

$$D < \frac{F}{2}, \quad \Delta = -.$$

Di qui si vede che passando il punto L da una distanza infinita ad una distanza soltanto 100 volte la distanza focale principale, la distanza conjugata Δ non cambia che insensibilmente, cioè di un solo centesimo della distanza focale principale. Quando il punto L è nel centro della sfera, i raggi sono ancora riflessi nel centro, ciò che è evidente. Se il punto L è nel fuoco principale, i raggi sono riflessi paralleli all'asse; ma se L è più vicino della metà della distanza focale principale, il valore di Δ è negativo, e ciò vuol dire che il fuoco conjugato Λ è dall'altro lato dello specchio, e che i raggi sono riflessi ancora divergenti.

5. Passiamo ora a considerare il caso in cui il punto luminoso sia in L', fig. 95, fuori dell'asse principale, ma poco lontano da esso, rispettivamente alla sua distanza dal centro C. Dal punto L' conduciamo una retta che passi pel centro K della sfera e vada a terminare alla superficie dello specchio in C'; la retta $L'KC'$ si chiama *un asse secondario*. Gli accidenti della riflessione rispetto a quest'asse secondario dovendo essere evidentemente affatto simili a quelli rispetto all'asse principale: tutti i raggi che partono dal punto L' anderanno dopo la riflessione a riunirsi in un punto Λ',

su di esso, e se per la poca inclinazione di $L' C'$ sopra $L C$ prendiamo le rette $L' C'$ e $\Lambda' C'$ per eguali ad $L C$ e ΛC si avrà ancora la relazione

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{F}.$$

Questa relazione sussistendo egualmente per tutti i punti luminosi che si possono supporre sulla retta $L L'$ poco lontani dall'asse principale, tutti questi punti avranno i loro fuochi conjugati sulla retta $\Lambda \Lambda'$ alla distanza Δ dal centro C determinata dall'equazione precedente.

Il fuoco conjugato Δ' si può facilmente costruire conducendo dal punto luminoso L' al centro C dello specchio una retta, e poi da C un'altra retta $C \Lambda'$ che faccia con $C K$ un angolo eguale ad $L' C K$, il punto Λ' dove questa retta taglierà $L' C'$ sarà il punto cercato. Infatti la retta $L' C$ potrà considerarsi come uno de' raggi che emana dal punto luminoso L', il qual raggio incontrando lo specchio in C, riflettendosi, farà da una parte e dall'altra della perpendicolare $C K$ un eguale angolo, esso verrà dunque riflesso secondo $C \Lambda'$, e come deve incontrare l'asse secondario $L' C'$ nel fuoco conjugato, il luogo di questo fuoco non potrà essere che Λ'.

6. Poste queste proprietà dei fuochi conjugati è facile intendere come si può costruire l'immagine riflessa da uno specchio.

Da un punto qualunque del corpo luminoso conducasi una retta che passi pel centro della sfera, di cui lo specchio è un segmento, e poi un'altra retta o raggio che passi pel centro dello specchio, il quale riflesso faccia coll'asse principale $C K$ un angolo d'incidenza eguale all'angolo di riflessione, il punto d'incontro di queste due rette sarà il luogo dove concorreranno tutti i raggi partiti dal punto luminoso preso in considerazione, ed ivi si formerà un'immagine di questo punto. Ripetendo la stessa costruzione per ciascun punto del corpo si avranno i luoghi delle immagini di tutti i punti, il cui aggregato formerà poi l'immagine totale del corpo riflesso dallo specchio.

Le due figure 96 e 97 rappresentano questa costruzione pei due punti estremi dell'oggetto, ciò che basta per dare una idea della situazione dell'immagine, perchè tutti i punti intermedii devono essere compresi fra questi.

La prima figura 96 suppone che l'oggetto sia a maggior distanza dallo specchio che il fuoco principale; la seconda 97 che ne sia più vicino.

Nel primo caso l'immagine è rovescia ed impiccolita; i raggi riflessi s'incontrano realmente nei luoghi dell'immagine, e formano l'apparenza di un oggetto pensile nell'aria: così la fiamma $L\,L'$ (fig. 96) si vedrebbe sospesa nell'aria in $\Lambda\,\Lambda'$, ed in questo caso si dice che l'immagine è *reale*.

Nel secondo caso (fig. 97) l'immagine risulta diretta ed ingrandita: i raggi sono riflessi alla superficie dello specchio con delle direzioni, come se partissero dai punti $\Lambda'\,\Lambda''$ ec. dell'immagine, in modo da presentare all'osservatore l'esistenza di un oggetto in $\Lambda'\,\Lambda''$ ed in questo caso l'immagine si dice *virtuale*. Un'occhio situato in $L\,L'$ che mirasse uno specchio concavo vedrebbe se stesso molto ingrandito in $\Lambda'\,\Lambda''$.

In generale l'immagine è ingrandita se l'oggetto è fra il centro K e lo specchio, ed è reale se la distanza dell'oggetto dallo specchio è maggiore della distanza focale principale, e virtuale se ne è minore.

7. Non abbiamo considerato che gli specchi concavi, cioè che presentano la loro concavità all'oggetto, se lo specchio fosse convesso vale a dire presentasse la sua convessità all'oggetto, si potranno impiegare le stesse costruzioni, e le formole (1), (1)', colla sola avvertenza che in queste ultime bisognerebbe cambiare il segno al raggio ρ e alla distanza focale F, o ciò che torna lo stesso prendere i loro valori negativi, onde il centro K corrisponda alla parte opposta. La figura 98 rappresenta in $\Lambda'\,\Lambda''$ l'immagine dell'oggetto $L\,L'$ la quale è sempre impiccolita diretta e virtuale. Un occhio in $L\,L'$, mirandosi in uno specchio convesso vedrebbe se stesso molto impiccolito in $\Lambda\,\Lambda'$.

Delle lenti.

8. Le lenti sono formate di sostanze diafane per lo più di vetro, e per la facilità di costruzione si fa in modo che le due superficie opposte che le limitano siano piane o sferiche. Nella figura 99 i diaframmi segnati 1, 2, 3, 4, 5, 6, rappresentano i profili di varie lenti in cui le superficie piane o sferiche sono combinate diversamente, nella condizione che quando sono amendue sferiche, i centri delle sfere a cui appartengono siano situati su di una stessa retta od asse.

La lente della prima forma si chiama *piano-convessa*, quella della seconda *convesso-convessa* o *bi-convessa*, la terza *piano-concava*, la quarta *concavo-concava*, o *bi-concava*, la quiuta, in cui le due su-

perficie si tagliano in una circonferenza, si dice un *menisco*, la sesta una lente *concavo-convessa*.

9. In tutte queste lenti supporremo sempre che le superficie sferiche non siano che piccoli segmenti di sfere di un raggio più grande.

Quando un raggio di luce casca sopra un punto di una lente di maggior poter rifrangente dell'aria, nel penetrare in essa, si rifrange accostandosi alla perpendicolare nel punto d'incidenza della prima superficie (1) fig. 100, dopo continua il suo corso in linea retta sino alla seconda superficie dove si rifrange di nuovo nel sortire, nell'aria, fig. 102, scostandosi dalla perpendicolare alla superficie nel punto d'emergenza.

Sottoponendo al calcolo il corso del raggio si dimostra, che se il raggio incidente taglia l'asse in un punto L, fig. 102 o 103, distante dalla lente di una quantità D, dopo aver subito le due rifrazioni, sorte dalla lente e va a tagliare di nuovo l'asse in un altro punto l al di là della lente ad una distanza Δ tale, che è connessa colla prima distanza per mezzo dell'equazione, vedasi la Nota II,

$$(1) \qquad \frac{1}{D} + \frac{1}{\Delta} = (n - 1)\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right);$$

nella quale n dinota l'indice di rifrazione della sostanza di cui è composta la lente, e ρ e ρ' i raggi della prima e seconda superficie dalle quali è limitata. Questa formola suppone che la lente sia convesso-convessa, e che i due punti L ed l siano, uno dal lato dove il raggio luminoso entra, e l'altro dal lato dove sorte.

Se la lente avesse una superficie concava converrebbe cambiare il segno del raggio corrispondente ρ, o ρ', o ciò che torna lo stesso prendere il valore di questo raggio negativamente; se tutte due le superficie fossero concave i raggi ρ e ρ' sarebbero amendue negativi.

Se il punto L' (fig. 103), dove il prolungamento del raggio emergente taglia l'asse, cadesse dalla stessa parte della lente del puuto L, il valore della distanza Δ nella formola precedente risulterebbe negativo.

I due punti L ed l si chiamano, come negli specchi, i *fuochi conjugati*, e le distanze D e Δ le *distanze focali coniugate*.

Se la prima distanza focale D è infinita, cioè se il raggio corre prima dell'incontro colla lente parallelamente al di lei asse princi-

(1) Lez. XXIII. art. 10.

pale, che è quello su cui si trovano i due centri delle superficie sferiche dalle quali la lente è limitata, la formola precedente dà

$$\frac{1}{\Delta} = (n-1)\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right).$$

Il punto φ, alla distanza Δ dato da questa equazione, si chiama il *fuoco principale*, e la distanza Δ si dice la distanza *focale principale*. Indicandola con F, da questa formola si ricava

$$(2) \qquad F = \frac{\rho\rho'}{(n-1)(\rho+\rho')};$$

e l'equazione (1) diviene

$$(1)' \qquad \frac{1}{D} + \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{F}.$$

Le equazioni (2) ed (1)' contengono tutta la teorica delle lenti sferiche.

10. La prima di queste due formole segnata (2) serve a calcolare i valori della distanza focale principale F, quando l'indice di rifrazione n ed i raggi di curvatura ρ e ρ' delle due superficie sono dati.

Il valore di n essendo >1, il valore di F sarà positivo

Per una lente piano-convessa in cui . . $\rho=\infty$, $\rho'=+$.
Per una lente bi-convessa in cui . . . . $\rho=+$, e $\rho'=+$.
Per un menisco di spigolo tagliente in cui . . . . $\rho=-$, e $\rho'=+$, ma $<\rho$.

Per lo contrario F sarà negativo

Per una lente piano-concava in cui. . . $\rho=\infty$, $\rho'=-$.
Per una lente bi-concava in cui. . . . . $\rho=-$, e $\rho'=-$.
Per un menisco di contorno cilindrico in cui . . . . $\rho=-$, e $\rho'=+$, ma $>\rho$.

Nel primo caso di F positivo si dice che la lente è *convergente*, perchè fa convergere verso un fuoco reale i raggi che le sono diretti parallelamente all'asse, nel secondo caso, quando F è negativo, si dice che la lente è *divergente*, perchè nel sortire da essa i raggi che prima d'entrare erano paralleli divengono divergenti, e non hanno propriamente che un fuoco virtuale $\varphi\varphi$ situato dal lato della lente per dove i raggi hanno penetrato (fig. 104).

Praticamente, abbiamo un carattere per decidere se una lente è convergente o divergente osservando, che le tre prime lenti che

sono convergenti sono più grosse nel mezzo, mentre le altre tre lenti divergenti sono più sottili.

11. Esaminiamo ora per mezzo della formola (1)' l'andamento di un raggio che parta da un punto dell'asse alla distanza D della lente e la attraversa.

Cominciamo dalle lenti convergenti in cui F è positivo. Dando a D i valori della prima colonna si avranno per Δ quelli espressi nella seconda

$$\begin{array}{ll} D = \infty\,, & \Delta = F. \\ D = 100\,F\,, & \Delta = \tfrac{100}{99}\,F. \\ D = 2\,F\,, & \Delta = 2\,F. \\ D = F\,, & \Delta = \infty. \\ D = \tfrac{1}{2}\,F\,, & \Delta = -F. \\ D = -F\,, & \Delta = \tfrac{1}{2}\,F. \end{array}$$

La seconda di queste espressioni ci fa vedere che avvicinando il punto luminoso da una distanza infinita alla distanza di 100 F il luogo del fuoco conjugato non s'allontana che di un $\tfrac{1}{99}$ di F. Se il punto luminoso è nel fuoco principale, il fuoco conjugato è all'infinito, se è ad una distanza minore del fuoco principale, Δ è negativo ed il fuoco conjugato casca dalla stessa parte, cioè diviene virtuale. Se i raggi invece di partire da un punto dato concorrono ad un punto posto al di là della lente, e D sia negativo, il fuoco conjugato si trova pure al di là della lente e sempre più vicino ad essa.

Sia ora la lente di fuoco divergente, per la quale F sia negativo. Onde assumere per F soltanto dei valori assoluti cambiamogli il segno, e diamo all'equazione (1) la forma

$$(1)'' \qquad \frac{1}{D} + \frac{1}{\Delta} = -\frac{1}{F}.$$

Se in questa equazione si danno a D i valori della prima colonna, si hanno per Δ quelli registrati nella seconda

$$\begin{array}{ll} D = \infty\,, & \Delta = -F. \\ D = F\,, & \Delta = -\tfrac{1}{2}\,F. \\ D = -F\,, & \Delta = \infty. \\ D = -\tfrac{1}{2}\,F\,, & \Delta = F. \end{array}$$

In tutti i casi i raggi divergono maggiormente, o concorrono meno verso l'asse dopo aver attraversato la lente e perciò la lente

si dice *divergente*. Nei due primi casi il fuoco conjugato si trova dalla stessa parte per dove i raggi entrano, quindi è un fuoco virtuale; negli altri due casi deve supporsi che i raggi non partano, ma che siano diretti verso un punto dell' asse al di là della lente. Il fuoco diviene reale soltanto fra il terzo ed ultimo caso (fig. 104).

12. Passiamo ora a considerare i raggi che partono da un punto fuori dell'asse, ma a poca distanza da esso. Per questa ricerca conviene premettere una nozione sul centro ottico di una lente. Rappresentino (fig. 105) KI, $K'E$ due raggi di curvatura delle due superficie della lente che siano fra loro paralleli, il punto O dove la retta EI taglia l' asse, chiamasi il *centro ottico della lente*.

I due angoli COI, $C'OE$ essendo piccoli, se si considerano per approssimazione CO e $C'O$ rispettivamente eguali ad IO ed EO si vede, pel motivo della similitudine dei triangoli KIO, $K'EO$, che il punto O od il centro ottico può determinarsi dividendo la parte dell' asse COC' compresa dalla grossezza della lente in due parti proporzionali ai rispettivi raggi delle sfere, cioè tali che sia

$$CO : CO' :: KC : K'C.$$

Determinato così il centro ottico consideriamo un raggio che traversi la lente nella direzione IOE: questo raggio facendo nell'interno della lente degli angoli alterni interni eguali coi raggi KI, $K'E$ perpendicolari alle rispettive superficie, farà pure degli angoli eguali all' esterno, Lez. XXIII art. 11. 12 e 13, e perciò entrerà ed escirà parallelamente a sè stesso.

Siccome le lenti hanno comunemente una piccola grossezza, il raggio incidente ed il raggio emergente che passano pel centro ottico essendo paralleli potranno anche considerarsi come la continuazione di una stessa retta, poichè la loro distanza sarà sempre molto piccola.

Il centro ottico non è esattamente lo stesso punto per tutte le direzioni della linea IE che congiunga due dei raggi di curvatura che siano paralleli: ma atteso che i segmenti sferici che limitano le lenti sono piccole porzioni di sfere, questo punto non varia che pochissimo di posizione, e potrà assumersi identico per tutti i raggi che entrano e sortono parallelamente a se stessi.

13. Questo premesso, sia ora un punto luminoso L', fig. 106, fuori dell'asse della lente ma a poca distanza da esso. Tirata da questo punto al centro ottico O della lente una retta, il raggio che partendo dal punto L' si propagherà secondo questa retta, traverserà,

come abbiamo detto, la lente senza piegarsi. La retta $L' O \Delta'$ costituisce ciò che si chiama un *asse secondario*, ed il raggio che lo percorre dicesi anche raggio principale del cono dei raggi luminosi che partono del punto L' e cascano sulla lente, e si dimostra, vedasi la Nota III, che tutti questi raggi dopo traversata la lente vanno a riunirsi sull'asse secondario in un punto Λ' tale, che chiamando D e Δ le distanze dei punti L' e Λ' dal centro ottico della lente, contate sull'asse principale, si ha per approssimazione

$$(1) \qquad \frac{1}{D} + \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{F}$$

F essendo come precedentemente la distanza focale principale della lente.

Questo risultamento ci fornisce il mezzo di costruire l'immagine di un oggetto i cui punti siano sensibilmente ad eguale distanza da una lente. Infatti supponiamo, (fig. 107 e 108), che $o\,o'$ sia l'oggetto, tirando da ciascun punto della sua superficie il suo asse secondario $o'i'$ ed inalzando per ciascuno di essi sull'asse principale e ad una distanza $O\Lambda$, eguale al valore di Δ dato dall'equazione precedente, una perpendicolare; i punti d'intersezione di queste perpendicolari cogli assi secondarii rispettivi determineranno i fuochi conjugati dei punti corrispondenti dell'oggetto, e dall'unione di tutti questi fuochi si avrà la sua immagine. Sarà facile seguendo queste regole di costruire in ogni caso le immagini che formano le lenti di diversa specie.

In generale si osserverà che la grandezza dell'immagine sta a quella dell'oggetto nella proporzione di Δ a D; essa è reale e rovescia se D e Δ hanno valori dello stesso segno (fig. 107), ed è virtuale e diritta se hanno valori di segno contrario (fig. 108).

14. Gli oggetti visti attraverso alle lenti od avanti agli specchi sembrano cambiare di grandezza a seconda della specie delle lenti o degli specchi, e delle distanze a cui gli oggetti sono situati.

La grandezza *reale* di un oggetto è espressa dal prodotto dell'angolo visuale che esso sottende, supposto piccolo, per la distanza alla quale l'oggetto si trova: così se $o\,o'$ (fig. 109), rappresenta un oggetto e P il luogo dell'occhio, si ha $o\,o' = P\,o$ tang. $o\,P\,o' = P\,o \times o\,P\,o'$, perchè l'angolo essendo piccolo può essere sostituito alla sua tangente.

La grandezza *apparente* di un oggetto è pure stimata secondo il prodotto dell'angolo visuale sotto cui appare la sua immagine,

e della distanza secondo cui si giudica che sia lontano l'oggetto. Il valore dell'angolo visuale, è sempre ben percepito e valutato dal senso, ma il giudizio della distanza riesce spesse volte incerto.

Se gli oggetti non sono molto lontani, l'occhio decide con abbastanza esattezza della loro distanza, tanto per la chiarezza con cui percepisce le immagini dei punti delle loro superficie, quanto per la maggiore o minore divergenza dei raggi componenti i pennelli o coni lucidi, che hanno la base sulla pupilla ed il vertice nei punti delle superficie medesime, alla divergenza dei quali l'occhio si conforma per la visione distinta. Quindi è raro che c'inganniamo sulla grandezza vera di un oggetto vicino, quando gli assi ottici dei nostri occhi sono amendue diretti sopra l'oggetto.

Quando gli oggetti sono lontani, le variazioni della divergenza dei raggi dei coni lucidi sono troppo piccole onde l'occhio possa conchiudere la distanza del loro vertice; il giudizio si aiuta coll'intensità della luce, la quale è diminuita dall'aria che attraversa, o come si dice dalla prospettiva aerea, colla precognizione che ha della grandezza dell'oggetto, od altre circostanze che gli possano servire d'indizio. Ma in questi casi il giudizio è spesso incerto, massime se si tratti di corpi luminosi assai lontani. Se dimandate alle varie persone di una comitiva di quanto giudicano che sia grande il diametro della luna, non solo i loro giudizi aberrano totalmente dal vero in quanto alla grandezza assoluta, ma anche le stime relative, rispetto al piccolo numero di pollici che gli assegnano, differiscono più del doppio.

Allorchè guardiamo attraverso ad una lente convessa un oggetto vicino, vale a dire allorchè facciamo uso di un *microscopio semplice*, conviene, per avere una visione distinta, porre la lente circa alla distanza focale dell'oggetto, ed accostare l'occhio alla lente. In questo caso il nostro senso suppone l'oggetto alla distanza della visione distinta dei piccoli oggetti, ed il giudizio della grandezza risulta nella ragione composta di questa distanza e dell'angolo visuale che sottende l'immagine.

Se l'occhio è allontanato dalla lente, e possiamo per qualche mezzo giudicare meglio della distanza dell'oggetto, allora la sua grandezza è valutata nella ragione composta della distanza stimata, e dell'angolo visuale sotteso dall'immagine.

L'angolo visuale iPi', (fig. 110) sotto cui si vede l'immagine di un oggetto oo' di una grandezza lineare, O, piccola, al-

traverso una lente le cui distanze $C\,o$, e $C\,P$ dall'oggetto e dall'occhio siano D e d, è dato dalla formola, vedasi la Nota IV,

$$(2)\qquad \frac{O}{D}\cdot\frac{1}{1-d\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{D}\right)}$$

F dinotando la distanza focale della lente.

Nel caso accennato sopra di un microscopio semplice, essendo D prossimamente eguale ad F, e d assai piccola, questa formola si riduce ad

$$\frac{O}{D};\qquad \text{e quindi } \frac{O}{D}\,h \qquad (3)'$$

dinoterà il prodotto col quale è espressa la grandezza stimata dell'oggetto, h rappresentando la distanza della visione distinta d'oggetti piccoli, la quale può assumersi, per un medio, eguale a $0^m,25$ cioè ad un quarto di metro.

Nel caso che la distanza dell'oggetto sia percepita dal senso ed entri come elemento nel giudizio della grandezza, allora bisogna moltiplicare l'espressione dell'angolo visuale data sopra, per $D+d$, e la grandezza apparente dell'oggetto è proporzionale al prodotto

$$(3)\qquad O\,\frac{1+\frac{d}{D}}{1-d\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{D}\right)}:$$

ma in questi casi se D differisce sensibilmente da F la visione riesce indistinta per un occhio ben conformato. L'immagine è rovescia se il valore del angolo visuale risulta negativo.

15. Chiamasi *campo* lo spazio entro cui sono comprese tutte le parti di un oggetto o degli oggetti che sono visibili ad un tempo guardandoli col mezzo di un istrumento ottico.

La grandezza del campo di una sola lente varia colla distanza dell'occhio dalla lente e colla distanza dell'oggetto. Se immaginiamo (fig. 110) il cono dei raggi luminosi che partendo dal punto o' dell'oggetto attraversa la lente, e dopo sorte da essa in forma di cilindro o cono poco aperto, è evidente che l'occhio potrà percepire l'immagine di questo punto se sarà situato in quest'ultimo cono. Pel punto P, sull'asse, occupato dall'occhio e per l'estremità della lente conducasi una retta $P\,S\,i'$, e pel centro C

della lente un asse secondario $C\,i'$ che vada ad intersecare la retta $P\,i'$ alla distanza in cui trovasi il fuoco conjugato della lente, ove è l'immagine dell'oggetto situato in $o\,o'$. L'angolo $o\,P\,o'$ così costruito è proporzionale alla grandezza della metà del campo, e la $o\,o'$, che è la metà della parte visibile dell'oggetto, determina la semigrandezza assoluta del campo stesso. È facile infatti di riconoscere costruendo una figura analoga alla 110, per un altro punto dell'oggetto più distante dall'asse, quale sarebbe o'', che esso non può inviare attraverso alla lente, alcun raggio di luce che giunga all'occhio situato in P.

Se si prende per punto occupato dall'occhio l'estremità p della pupilla (fig. 111) dalla parte dell'asse principale della lente, nella quale sta la metà dell'oggetto che si considera, la pupilla intera riceverà dei raggi inviati dal punto o', e vedrà l'immagine i' di quel punto colla chiarezza completa. Se si assume invece per punto occupato dall'occhio l'estremità $p_{,}$ (fig. 111 *bis*) della pupilla dalla parte opposta dal detto asse, l'occhio vedrà il punto $i_{,}$ dell'immagine coi soli raggi estremi del pennello conico $o_{,}\,s_{,}\,o\,s\,p_{,}$ e la chiarezza sarà minima. La chiarezza dei punti intermedii dell'immagine, compresi fra i' ed $i_{,}$, anderà continuamente scemando.

Conservando le denominazioni precedenti, e chiamando a la semi-apertura $C\,S$ della lente, l'espressione dell'angolo proporzionale alla metà del campo è data dalla formola, vedasi la Nota V,

$$(4) \qquad a\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{D}-\frac{1}{F}\right)-\frac{p}{d};$$

e la metà del campo, o la parte visibile dell'oggetto da

$$(5) \qquad a\left(1+\frac{D}{d}-\frac{D}{F}\right)-p\,\frac{D}{d}.$$

Alla lettera p si potrà dare il valore della semi-apertura, o semidiametro della pupilla, il quale è, per un medio, di 2^{mm}, tanto positivamente che negativamente. Se si prende p positivamente, si avrà la grandezza del campo che è visibile colla piena chiarezza, se negativamente, si avrà il valore estremo del campo totale appena visibile.

LEZIONE XXXIX.

Stromenti ottici.

1. Procederemo in questa Lezione a mostrare alcune delle applicazioni che si sono fatte delle proprietà delle lenti e degli specchi che abbiamo dato a conoscere nella Lezione precedente.

Cominciando dagli specchi piani accenneremo una curiosa applicazione delle proprietà dei medesimi fatta da Sir D. Brewster coll' invenzione del Caleidoscopio (1), che ebbe molta voga come oggetto di spasso nel mondo galante pochi anni addietro. Questo Fisico studiando le leggi della polarizzazione della luce riflessa, delle quali abbiamo parlato nelle Lezioni XXXIII e XXXIV, osservò l' effetto della ripetizione delle immagini riflesse da due specchi piani inclinati fra loro, e ne trasse partito per la costruzione del detto gioiello.

Caleidoscopio. Lo strumento consiste di due specchi piani oblunghi (fig. 112) che si uniscono nel verso della loro lunghezza sotto un angolo misurato da una parte aliquota della circonferenza. In una delle estremità dell' angolo diedro fatto dai due specchi si collocano alcuni piccoli oggetti translucidi, per esempio dei pezzettini di fili di vetro di varii colori e varie forme, ed onde non scorrano lungo gli specchi si frappongono sciolti fra due vetri piani, l' uno dei quali, quello che sta verso l' infuori è appannato o translucido. Quest' apparecchio è rinchiuso in un tubo cilindrico o prismatico; una delle sue basi, quella dalla parte ove sono gli oggetti è aperta, l' altra dalla parte opposta è chiusa, e non ha che un foro dirimpetto all' angolo interno formato dai due specchi. Dirigendo l' estremità aperta verso la luce del cielo o d' una finestra, ed applicando l' occhio al forellino dell' estremità opposta, si scorge un' immagine fatta di belle forme vario-pinte e tutte disposte simmetricamente in un circolo o poligono regolare, che cambia in mille modi collo scuotere o girare un poco il tubo.

Per intendere quest' effetto siano CA, CB (fig. 113) i due specchi in profilo ed ab un oggetto posto framezzo. Rammentandoci che l' immagine di un oggetto in uno specchio piano è vista

(1) Nome derivato dalle parole greche καλος *bello*, ειτος *forma*, σκοπεων *vedere*.

dietro lo specchio in una posizione simile a quella in cui è situato l'oggetto davanti (1), si verificherà facilmente che

$b\ a_1$, $a\ b_1$ saranno le duo prime immagini dell'oggetto nei due specchi

$a_1 b_2$, $b_1 a_2$ saranno le immagini delle due immagini $b a_1$ $a b_1$, considerate còme due nuovi oggetti

$b_2 a_3$, $a_2 b_3$ le immagini delle due immagini $b_1 a_2$ $a_1 b_2$

$a_3 b_4$, $a_3 b_4$ le immagini delle due immagini $a_2 b_3$, $b_2 a_3$

$a_4 b_4$ le immagini sovrapposte delle due immagini $a_3 b_4$, $a_3 b_4$.

L'occhio guardando internamente all'angolo dei due specchi dal forellino nell'estremità opposta, e vedendo nello stesso tempo tutte queste immagini, percepisce, in vece di un solo oggetto, una disposiziono simmetrica di più oggetti simili formanti un poligono.

Le linee punteggiate che si vedono nella figura servono a dimostrare colla semplice ispezione, che le estremità delle immagini, agli angoli del poligono si trovano tutte sulla circonferenza di due circoli, e che le immagini sono tante quante volte la circonferenza contiene l'arco che misura l'angolo formato dai due specchi.

Essendovi fra gli specchi più oggetti di diverse forme e colori, ciascuno produce un poligono simile, e dalla sovrapposizione di questi nascono delle belle configurazioni. Scuotendo un poco gli oggetti onde prendano delle nuove posizioni, queste belle forme cambiano in mille guise.

2. *Camera lucida.* Un' utile applicazione degli specchi piani è dovuta al Dor. Wollaston per l'invenzione della camera lucida che il Cav. Amici ha grandemente perfezionato (2).

La camera lucida ha per iscopo di progettare l'immagine di un oggetto su di un foglio di carta, e di poter vedere nello stesso tempo su di esso la punta di un lapis, onde il disegnatore possa dirigerla colla mano, e scorrere i contorni dell'immagine per prenderne copia.

Questo stromento è fondato sulla proprietà cho hanno le lamine di cristallo di riflettere una parte sensibile della luce cho casca su di esse molto obliquamente, e di lasciar vedere contemporaneamente gli oggetti situati dal lato opposto. Le figure 114 e

(1) Lez. XXXVIII art. 2.

(2) Sopra le Camere Lucide Memoria del Sig. Prof. G. B. Amici. Bologna 1819, Stamperia di Annesio Nobili. Annales de Chimie et de Physique Vol. XXII pag. 137.

115 rappresentano due costruzioni della camera lucida immaginata dal Prof. Amici. *A B C D* è una lamina di cristallo colle facce parallele, *S* è uno specchio metallico; un raggio *R* che parte da un oggetto, riflesso prima dallo specchio *S*, casca obliquamente sulla faccia *B F* della lamina, ed è riflesso una seconda volta, poi giunge all' occhio del disegnatore che guardando dal di sopra mira in basso: lo stesso succedendo di tutti gli altri raggi egli vede l' immagine dell' oggetto projettata su di un sottoposto foglio di carta, Lez. XXXVIII art. 2. La luce potendo attraversare la lamina di facce parallele senza contorcere le immagini degli oggetti sottoposti, egli vede nello stesso tempo il foglio di carta e la punta del lapis, colla quale va disegnando i contorni dell' immagine. Onde l' occhio del disegnatore possa percepire con distinzione l' immagine dell' oggetto e la punta del lapis, conviene che i pennelli dei raggi lucidi che vi giungono dai varii punti dell' una e dell' altra abbiano appresso a poco lo stesso grado di divergenza, ed uno stesso grado d' intensità. Come l' oggetto si trova per lo più a maggior distanza dall' occhio che non la carta su cui si disegna, ed i pennelli luminosi inviati dai punti di quello arrivano meno divergenti che quelli che partono dai punti di questa, si frappone all' oggetto e allo specchio metallico una lente concava, onde renderli più divergenti, o pure si pone fra il disegno e la lamina di cristallo una lente convessa, per rendere i pennelli lucidi inviati dai punti di questo meno divergenti, Lez. XXXVIII art. 11, ed ottenere così un' uniformità di divergenza degli uni e degli altri. In quanto al dare un' egual intensità di luce, ciò dipende dall' industria del disegnatore nel situare se stesso e l' oggetto opportunamente rispetto alla finestra, per cui entra la luce, e nell' adombrare colla mano sinistra più o meno il luogo del foglio, su cui sta disegnando, onde l'immagine dell'oggetto non venga abbagliata dalla troppa luce che riflette la carta.

In luogo di uno specchio metallico *S*, il Cav. Amici ha anche sostituito un prisma isocele di cristallo, che come abbiamo detto nell' articolo 12 della Lezione XXIII, può far l' ufficio di uno specchio piano, e riflette più luce.

La figura 116 rappresenta il complesso delle varie parti su descritte di una camera lucida d' Amici. *A B* rappresenta un tetto annerito per impedire che le varie luci estranee riflesse dall' apparecchio giungano all' occhio del disegnatore, il quale guarda attraverso ad una fenditura praticata nel mezzo del tetto.

3. *Occhiali.* Uno degli usi più importanti e più generalizzato

delle lenti è quello di farle servire per occhiali alle persone di vista troppo corta o troppo lunga. L'invenzione degli occhiali fu fatta in Toscana verso il principio del secolo XIV ed è attribuita a *Salvino d'Armato degli Armati*. L'occhio umano può essere paragonato ad una lente convergente. I raggi di ciascuno dei coni lucidi, che emanano dai varii punti di un oggetto ed hanno la loro base sulla pupilla, sono raccolti in un proprio fuoco nel fondo dell'occhio sulla retina, e si forma così su di essa un'immagine dell'oggetto, sensibile al nervo ottico. La natura sempre ricca di mezzi oltre il nostro immaginare ha costrutto l'occhio in modo che si conforma da se stesso a dare la visione distinta, cioè a far cascare esattamente sulla retina, tanto l'immagine di un punto lontano di 2 decimetri, come quella d'un punto ad una distanza infinita. Se per abbondanza d'umori e per eccesso di sfericità l'occhio di taluno non può conformarsi a vedere bene gli oggetti lontani, ed ha bisogno di avvicinarli a meno di 2 decimetri, onde i coni luminosi che i loro punti inviano giungano più aperti e divergenti sulla pupilla, si dice che quello che ha questo difetto è di vista corta o *miope*. Se viceversa per mancanza di convessità l'occhio non è atto ad accorciare nell'interno dell'occhio il fuoco dei coni lucidi, inviati dai vari punti di un oggetto distante solo di due decimetri, in modo che caschi sulla retina, la persona il cui occhio ha questa imperfezione si dice di vista lunga o *presbita*. A supplire ai difetti della vista dei miopi o dei presbiti sono destinati gli occhiali.

La persona miope, volendo tenere l'oggetto che osserva alla distanza ordinaria e più comoda, che è circa di due o tre decimetri, bisogna che usi di una lente concava che renda i raggi dei coni luminosi inviati dai punti dell'oggetto più divergenti, come se provenissero da un oggetto più vicino; il presbita per lo contrario ha bisogno di una lente convessa che renda i detti coni più convergenti, come se provenissero da un oggetto più lontano. Stabilita la natura della lente, la difficoltà che rimane si è di proporzionarla in modo che il suo effetto non sia nè eccessivo nè deficiente rispetto a quello che si richiede dall'individuo. Per tale scopo bisogna sapere a quale distanza dall'occhio l'individuo vede più distintamente un oggetto: se è miope, un oggetto piccolo vicino al suo occhio, se è presbita, un oggetto grande, come una gran lettera majuscola a maggior distanza. Indicheremo questa distanza, adattata all'occhio dell'individuo, e determinata sperimentalmente, colla lettera a. Ora abbiamo visto nella Lezione precedente art. 3 e 11

che una lente produce l'effetto di far concorrere i raggi, provenienti da un punto dell'oggetto, nel suo fuoco conjugato come se partissero da questo fuoco. Converrà dunque che la lente da impiegarsi dall'individuo sia tale che abbia il suo fuoco conjugato alla distanza a, quando un punto dell'oggetto è alla distanza $D = 0^m,25$, la più comoda alla quale si sceglie di tenere l'oggetto. Osservando di più che il fuoco conjugato trovandosi dalla stessa parte della lente, in cui è l'oggetto deve essere $\Delta = -a$, art. citato, la detta formola darà

$$\frac{1}{0,25} - \frac{1}{a} = \frac{1}{F}$$

dalla quale si ricava

$$F = \frac{0,25 \,.\, a}{a - 0,25}.$$

Potremo così col mezzo di quest'equazione calcolare la distanza focale della lente più opportuna per l'individuo, che vede gli oggetti più distintamente, quando sono alla distanza a. Il valore di F sarà negativo pei miopi, pei quali $a < 0^m,25$, e la lente sarà divergente, ed il detto valore sarà positivo pei presbiti, pei quali $a > 0,25$, e la lente sarà convergente.

È buona regola di tenere gli occhiali meno discosti dagli occhi che sia possibile; ma come non si può a meno di tenerli ad una piccola distanza, gli oggetti saranno visti un poco impiccioliti dai miopi, ed un poco ingranditi dai presbiti, come può verificarsi applicando la formola (2) dell'articolo 14 della Lezione precedente al calcolo dell'ingrandimento. Non esiste però, quando si tengano gli occhiali molto vicini all'occhio, nessun ingrandimento od impiccolimento notabile, come varii autori hanno inavvertitamente asserito. Un aumento o diminuzione notevole nella grandezza dell'immagine può ottenersi allontanando la lente dall'occhio, ma questi effetti sono variabili colle distanze della lente e dell'oggetto dall'occhio medesimo.

4. La proprietà, che hanno le lenti convergenti di formare un'immagine reale dalla parte opposta dell'oggetto, è il fondamento della camera ottica, del megascopio, del microscopio solare, della lanterna magica, e della fantasmagoria.

Camera ottica. Questo stromento è destinato per lo più a prendere il disegno di vedute naturali. Esso consiste di una cassetta nella quale non si lasciano penetrare che i raggi riflessi da uno specchio e concentrati nei rispettivi fuochi da una lente con-

vergente. Nella figura 117 i raggi sono riflessi prima d'attraversare la lente, nella fig. 118 lo sono dopo. Le immagini che si formano degli oggetti esteriori sono progettate nel primo caso sul fondo della cassetta dove sono disegnate; nel secondo caso sono formate sopra un vetro leggermente appannato e possono essere calcate con facilità su di una carta vegetale trasparente sovrapposta al vetro. In un caso e nell'altro la lente è mobile per poterla portare alla distanza necessaria onde il fuoco conjugato caschi sulla superficie su cui deve essere disegnata.

In luogo di una lente e di uno specchio si fa anche uso di un prisma *menisco*, (fig. 116) cioè di un prisma che rifletta internamente la luce, come quello citato all'articolo 12 della Lezione XXIII, ma le cui facce sono una concava e l'altra convessa, la prima essendo rivolta verso l'oggetto. I raggi di curvatura di queste due superficie stando fra loro come 8 a 5 producono l'effetto di una lente convergente, e la riflessione, che si fa internamente sulla faccia piana della lente, supplisce allo specchio ma dà una luce molto più abbondante, e delle immagini più vivide.

Megascopio. Quando si hanno a produrre le immagini di oggetti artificiali, come di un disegno o di un basso rilievo, conviene illuminare per mezzo della riflessione dei raggi solari o di luci artificiali questi oggetti, in questo caso si possono tenere gli oggetti più o meno vicini e si può dare alle immagini differenti grandezze; l'istrumento fornito di tutte le parti accessorie per questo scopo è stato chiamato da Charles Megascopio.

Il *microscopio solare* ha per oggetto principale di far vedere ingrandite le immagini di piccolissimi oggetti, che per la loro sottigliezza sono comunemente trasparenti. Perciò si illumina fortemente pel di dietro l'oggetto o concentrando su di esso con lenti *H*, *L* i raggi del sole (fig. 119), od anche quelli assai vividi di una luce artificiale, prodotta dalla combustione di qualche gas, che contenga in istato d'incandescenza del carbone, o delle minutissime parti di materie solide. I raggi che si diramano da tutti i punti dell'oggetto fortemente illuminato sono raccolti da una lente convergente di corto fuoco posta ad una distanza dall'oggetto appena un poco minore della sua distanza focale principale, e formano alla distanza conjugata molto più grande un'immagine assai amplificata che si riceve su d'un telajo bianco. Le dimensioni lineari dell'immagine si trovano ingrandite rispetto a quelle dell'oggetto nella proporzione della distanza dell'immagine alla distanza dell'oggetto dalla lente.

Lanterna magica. Lo stesso principio è applicato alla costruzione della lanterna magica che serve per diletto del popolo. Gli oggetti sono alcuni dipinti bizzarri fatti su dei vetri piani. La luce di una lucerna diretta per riflessione illumina i vetri dipinti, ed una lente raccoglie i loro raggi e forma le immagini dei medesimi coi propri colori sulla parete opposta di una camera che è tenuta al buio, onde la luce estranea non ammorzi il loro splendore.

La *fantasmagoria*, come indica il suo nome, è un apparecchio per produrre l'illusione di fantasmi. Nello stromento precedente l'immagine conserva una grandezza costante durante l'osservazione, in questo invece si vuole produrre un'immagine su di una tela o velo trasparente, la quale vista da uno spettatore al di là della tela vada continuamente ingrandendosi. Onde quest'ingrandimento succeda è necessario che l'oggetto, cioè lo spettro dipinto, s'avvicini al fuoco principale della lente, e che il fuoco conjugato in cui si forma l'immagine si allontani. Come la tela od il velo è immobile converrà che sia la lente che si scosti da esso, e che nel tempo stesso si avvicini all'oggetto. Un meccanismo per produrre questo doppio movimento non è difficile da immaginarsi. Lo spettatore stando nel bujo dalla parte opposta vede soltanto l'immagine che va ingrandendosi, e riceve l'illusione di uno spettro o fantasma che si avanza. Onde l'effetto sia più verosimile conviene che la luce che illumina l'oggetto vada crescendo a misura che l'immagine s'ingrandisce, talchè questa non solo divenga più pallida per la diffusione della luce, ma vada anzi aumentando d'intensità.

LEZIONE XL.

Telescopio e Microscopio composto.

1. Il *telescopio* è uno stromento atto a farci vedere distintamente e molto ingranditi gli oggetti lontani (1). La scoperta del telescopio fu fatta in Olanda a Middlebourg, ma Galileo fu il primo che lo costrusse con principii certi, ed il telescopio fatto secondo quella costruzione chiamasi *galileano.*

La costruzione galileana, che è quella della quale ora si fa molto uso pei canocchialetti di teatro, consiste di due lenti; una più grande convessa che è diretta verso l'oggetto e che perciò chiamasi *obbiettivo*, e l'altra concava e più piccola alla quale si applica l'occhio, e che è detta *oculare.*

Volendo intendere l'effetto di questo stromento, come di qualunque altro stromento ottico composto di più lenti o specchi, non si ha che a considerar le lenti o specchi uno dopo l'altro, eseguire successivamente secondo le regole date le costruzioni delle immagini reali o virtuali che verrebbero a formarsi, e riconoscere così qual è il luogo dell'ultima percepita dall'occhio. Seguendo questa strada, della quale ora daremo alcuni esempii, si evita di cadere in equivoci che talvolta s'incontrano nei trattati d'ottica.

Sia perciò $O\,o$ (fig. 120) un oggetto posto avanti un canocchiale galileano, a tale distanza che i raggi che partono dai diversi punti caschino sensibilmente paralleli sull'obbiettivo, quantunque nella figura per mancanza di spazio presentino una divergenza sensibile. Se non esistesse che l'obiettivo essi formerebbero, come abbiamo esposto, Lez. XXXVIII art. 11, un'immagine $I\,i$ alla distanza focale principale, ed i sarebbe l'immagine del punto o. Supponiamo ora d'avere una lente divergente di una distanza focale principale assai più corta, come sarebbe $L\,I$, e di applicare questa lente in $L\,I$ in modo che il suo fuoco virtuale caschi appunto nello stesso luogo I. Fra i varii raggi del pennello lucido che vanno a riunirsi in i consideriamo quello che va a passare pel centro ottico dell'oculare e che dicesi raggio principale (2); questo raggio continuerà irrefratto il suo cammino in linea retta, e come l'oculare è supposto avere il suo fuoco alla distanza $L\,I$, tutti i

(1) Il suo nome è derivato da Τηλε *lontano* e Σκοπειν *vedere.*
(2) Lez. XXXVIII art. 13.

raggi che senza di esso sarebbero andati a riunirsi in i, saranno invece resi paralleli (1) e sortiranno dalla lente parallelamente al raggio principale NL.

Un occhio applicato alla lente ricevendo paralleli i raggi componenti il pennello lucido, che parte dal punto o, avrà una visione distinta di questo punto; ma in vece di vedere lo stesso punto, o, lontano, come lo vedrebbe dal centro C dell'obiettivo nella direzione Co, lo vedrà nella direzione LNn, e l'occhio stimerà il punto o in n. Lo stesso ragionamento ripetuto sui raggi che compongono il pennello lucido che parte dal punto O, ci mostra che l'occhio applicato all'oculare vedrà pure distintamente il detto punto, perchè questi raggi sortiranno anch'essi paralleli dall'oculare, ma il punto O sarà veduto nella stessa direzione LO. I due punti estremi del corpo Oo saranno dunque veduti dall'occhio applicato all'oculare, come se esistessero uno in O e l'altro in n, e sottendessero la corda dell'angolo OCn. Così mentre l'occhio disarmato, e situato in C, giudicherebbe la porzione Oo dell'oggetto lontano proporzionale all'angolo visuale OCo, armato del canocchiale la giudica invece proporzionale all'angolo OLn. Lo stesso potrebbe dirsi della parte dell'oggetto che fosse situato al di sotto dell'asse LO. Ora nei due triangoli iCI, iLI i due angoli in C ed L sono opposti al vertice a quelli che ora abbiamo nominati, e per essere questi angoli piccoli, i loro valori possono essere presi per quelli delle loro tangenti, si avrà quindi, (Legendre Trig. XLIII),

$$iCI = \text{tang}\, iCI = \frac{iI}{CI} \quad ; \quad iLI = \text{tang}\, iLI = \frac{iI}{LI};$$

e perciò

$$iCI : iLI :: \frac{1}{CI} : \frac{1}{LI} :: LI : CI;$$

proporzione, la quale ci dice che la grandezza dell'oggetto, visto direttamente, è a quella con cui appare, visto attraverso del telescopio, come la distanza focale dell'oculare, alla distanza focale dell'obiettivo.

Si dice *amplificazione* od *ingrandimento* lineare di un canocchiale il rapporto inverso delle due grandezze o dei due angoli visuali che abbiamo determinato. Se rappresentiamo con F ed f le distanze focali dell'obiettivo e dell'oculare si avrà quindi

(1) Lez. XXXVIII, art. 11.

$$(1) \qquad \text{amplif.} = \frac{F}{f}.$$

2. Esaminiamo la chiarezza dell' immagine. Il grado di chiarezza, colla quale si vede una piccola porzione od elemento di una superficie, è, come abbiamo notato all' articolo 5 della Lezione XXIII, nella ragione diretta della quantità di luce che riceve la pupilla, e nella ragione inversa della grandezza apparente dell' elemento che si percepisce. La luce componente il pennello, che parte dall' elemento O, arriva all' obiettivo sotto una forma sensibilmente cilindrica, quando l' oggetto sia lontano, e sortendo dall' oculare si raccoglie in un' altro cilindro di dimensioni minori. Le intensità della luce nel pennello incidente e nel pennello emergente dall' istromento staranno fra loro nella ragione inversa delle aree delle sezioni normali agli assi dei due cilindri, la quale è quella dei quadrati dei loro raggi (1). Ma dai triangoli simili (fig. 121), $IL\omega$, $Ic\Omega$ si ha

$$\overline{L\omega}^2 : \overline{C\Omega}^2 :: \overline{IL}^2 : \overline{IC}^2 :: f^2 : F^2;$$

dunque la densità od intensità d della luce nel pennello incidente, e l' intensità D nel pennello emergente soddisfaranno alla proporzione

$$d : D :: \frac{1}{F^2} : \frac{1}{f^2}.$$

Il pennello lucido che sorte dall' oculare essendo supposto avere un diametro non minore di quello della pupilla, la quantità di luce che essa riceverà stando dietro all' oculare sarà a quella che riceverebbe se fosse situata dove è il centro C dell' obbiettivo, come $D : d$ o sia come $F^2 : f^2$. In conseguenza di ciò la pupilla riceverà maggior luce stando applicata all' oculare, ma d' altra parte l' immagine dell' elemento veduto sarà d' altrettanto ingrandita. Infatti le dimensioni lineari dell' immagine viste col telescopio trovandosi per la proposizione precedente aumentate nella ragione di $F : f$, la grandezza dell' elemento superficiale O sarà cresciuta nella ragione di $F^2 : f^2$ (2). Dunque benchè la luce, che fornisce alla pupilla l' immagine dell' elemento O, sia cresciuta nel rapporto di $F^2 : f^2$, come questa viene a diffondersi su d' un' immagine che è pur dilatata nel rapporto di $F^2 : f^2$, non potrà dare a

(1) Legendre Lib. IV prop. VII corol. II.
(2) Legendre Lib. III Prop. XXVII.

ciascun punto di essa che una chiarezza eguale a quella, colla quale si vede direttamente ciascun punto dell'oggetto.

Questa proposizione è vera nell'ipotesi che i cristalli, di cui l'obbiettivo e l'oculare sono fatti, non riflettano ne assorbano luce, il che in pratica non succede, quindi la chiarezza sarà un poco diminuita guardando attraverso al canocchiale, ma questa piccola perdita sarà grandemente compensata dall'amplificazione. La luce che si perde nell'attraversare una lente poco grossa può essere valutata a 0,09 della luce incidente.

3. Ci resta ora a determinare il campo o la grandezza dell'angolo, in cui saranno compresi gli oggetti visibili contemporaneamente. Perciò supponiamo che Pp (fig. 122) sia il semidiametro della pupilla, e che Bib sia il pennello luminoso il cui raggio estremo BC dopo la rifrazione per l'oculare propagandosi lungo la cej passi per la detta estremità p: in tal caso questo pennello apparterrà al punto dell'oggetto che sarà il più lontano dall'asse IA e sarà ancor visibile con tutta la pupilla. L'angolo IAi determinato dalle dette condizioni misurerà dunque la metà del campo del canocchiale visibile colla chiarezza completa, e si dimostra, vedasi la Nota 1, che questo semi-campo è espresso dalla formola

$$(2) \qquad \frac{\frac{f}{F}A - p}{h + \frac{F}{f}a};$$

nella quale, conservando le precedenti denominazioni, si è dinotato di più con A la semi-apertura AB dell'obiettivo, con a la distanza CP dell'occhio dall'oculare, e con h, la distanza AC reciproca delle due lenti, la quale nella costruzione supposta è eguale ad $F - f$.

Da questa formola si vede che il più gran campo sarà percepito quando $a = 0$, cioè quando l'occhio sarà applicato immediatamente sull'oculare, nel qual caso il denominatore diviene minimo, e la formola si riduce soltanto a

$$(2)' \qquad \frac{\frac{f}{F}A - p}{h}.$$

Questa formola dà la grandezza del campo in cui sono compresi i punti, i cui pennelli lucidi al sortire dall'oculare illuminano

tutta la pupilla, e questi punti sono veduti colla chiarezza completa. Se nella stessa formola si fa $p = -p$, cioè si suppone che l'estremità p della pupilla sia l'opposta, o quella che è situata sotto l'asse, la formola diviene

$$(2)'' \qquad \frac{\frac{f}{F}A + p}{h};$$

ed esprime il campo totale, tenendo conto anche della parte sul contorno del campo, i cui punti non sono visibili con piena chiarezza, ma soltanto con quelle porzioni dei pennelli lucidi, successivamente più piccole, che possono entrare nella pupilla, e terminano col constare dei soli ultimi raggi che possono passare per le sue estremità.

Vari autori d'ottica, seguendo una costruzione adottata dall'Eulero, nella quale si ommette di considerare i raggi principali relativi all'oculare, hanno tratto delle false conclusioni sulla grandezza del campo, credendo che dipendesse dalla grandezza della pupilla (1). La grandezza del campo nei canocchiali di teatro dipende quasi interamente dalla grandezza dell'oblettivo; come si vede nella formola premessa, ed il diametro della pupilla non influisce che su di un'anello della larghezza angolare $\frac{2p}{h}$ nel bordo del campo, nel quale la chiarezza va diminuendo sensibilmente dall'interno all'esterno e termina nell'oscurità.

Per lo più si dà all'oculare, un'estensione assai più grande della pupilla: in questo caso senza muovere il canocchiale, col solo passeggiare l'occhio sull'oculare si vengono a scoprire le parti di un campo più grande. La grandezza di questo campo si può ottenere dalle formole premesse dando a p i valori estremi delle distanze dall'asse alla quale l'estensione dell'oculare permette di trasportare le estremità della pupilla.

4. *Telescopio di Kepler od astronomico.* Kepler propose un cambiamento notabile al canocchiale galileiano sostituendo all'oculare concavo posto fra l'obbiettivo ed il suo fuoco principale, un oculare convesso posto al di là dello stesso fuoco; ed il P. Scheinner pare il primo che abbia osservato con un telescopio di questa specie venti o trent'anni dopo.

(1) Io fui fatto consapevole di questo errore comune nei trattati d'ottica dal sig. Consonni costruttore dilettante di stromenti ottici in Milano.

Sia $A\ B$ l'obbiettivo, (fig. 123), il quale ricevendo i pennelli di luce inviati dai punti di un'oggetto $O\ o$, posto a grande distanza, formi l'immagine di esso nel fuoco $I\ i$. Alla distanza $I\ C$ pongasi una lente oculare convessa, il fuoco principale della quale coincida con I; in questa situazione dell'oculare tutti i raggi dei pennelli lucidi, che hanno il loro vertice in un punto dell'immagine $I\ i$, sortiranno dal telescopio paralleli al rispettivo raggio principale che attraversa il centro ottico C dell'oculare. Così il punto i inviando i raggi del pennello lucido $c\ i\ c'$, tutti questi raggi all'uscire dall'oculare seguiranno le direzioni $c\ n$, $c'\ n'$, ec. parallele ad $i\ C\ N$.

Un'occhio posto dietro all'oculare, che riceva una porzione di questi raggi paralleli, vedrà il punto i dell'immagine, corrispondente al punto o dell'oggetto, come se fosse situato ad una distanza indefinita nella direzione $N\ C\ i$, e come il punto I, che corrisponde al punto O dell'oggetto sarà veduto nella direzione $H\ C\ I$, l'oggetto parrà sottendere l'angolo $I\ C\ i$. Ora lo stesso oggetto visto ad occhio nudo dal centro A dell'obbiettivo non sottenderebbe che l'angolo $O\ A\ o = I\ A\ i$, così quest'oggetto parrà ingrandito nella proporzione degli angoli $I\ C\ i$ ad $I\ A\ i$. Ma i due triangoli rettangoli $i\ I\ A$, $i\ C\ I$, nei quali gli angoli in A e C sono piccoli e possono essere sostituiti alle loro tangenti, ci danno (1)

$$I\ A\ i = O\ A\ o = \frac{I\ i}{A\ I} \quad ; \quad \text{ed} \quad I\ C\ i = \frac{I\ i}{C\ I};$$

dunque sarà

$$O\ A\ o : I\ C\ i :: \frac{I\ i}{A\ I} : \frac{I\ i}{C\ I} :: C\ I : A\ I;$$

cioè l'oggetto visto attraverso il canocchiale parrà tanto più grande che visto ad occhio nudo, quanto la distanza focale $A\ I$ dell'obbiettivo sarà più grande della distanza focale $C\ I$ dell'oculare.

Ritenendo che f ed F dinotino le distanze focali principali dell'oculare e dell'obbiettivo, l'amplificazione sarà dunque espressa da

$$(3) \qquad \text{amplif.} = \frac{F}{f};$$

come nel canocchiale galileiano.

Si osserverà che in questo canocchiale l'immagine è formata

(1) Legendre Trig. XLIII.

ed è vista in una situazione rovescia a quella in cui sta l'oggetto, e che perciò gli oggetti sembrano invertiti. Questa inversione non produce nessun inconveniente, quando si osservano le stelle od altri corpi celesti, e perciò questo canocchiale, che è preferito dagli astronomi per altre qualità, si chiama anche telescopio *astronomico.*

5. La chiarèzza dell'immagine formata da questo telescopio si deduce collo stesso ragionamento che abbiamo impiegato all'articolo 2 pel canocchiale galileiano. La quantità di luce che riceve la pupilla armata dal telescopio, e quella che riceverebbe essendo nuda, stanno fra loro come le intensità $D : d$ o sia come le aree delle sezioni dei pennelli emergente ed incidente, il rapporto delle quali è dato da $F^2 : f^2$. Ma come ciascuna parte superficiale dell'immagine è veduta ingrandita rispetto alla parte analoga dell'oggetto nella stessa proporzione di $F^2 : f^2$, così la chiarezza di ciascun punto dell'immagine vista nel telescopio torna ad essere eguale a quella di ciascun punto dell'oggetto visto direttamente.

6. Aggiustando uno stromento ottico qualunque per la visione distinta, vale a dire dando alle rispettive parti la situazione loro dovuta, onde i raggi dei pennelli lucidi provenienti da ciascun punto dell'oggetto sortano dell'oculare paralleli, ed esponendo l'obbiettivo alla luce viva di un punto situato sull'asse dello stromento, alla distanza in cui deve essere l'oggetto, si osserva sull'oculare un piccolo cerchio illuminato che la debole riflessione dei pulviscoli e dell'umidità aderenti al vetro rende visibile, e dal quale parte un cilindro di luce che si propaga all'esterno. Questo cilindro non è altro che il pennello lucido formato dai raggi del punto luminoso di cui abbiamo or ora parlato, e che sortono paralleli dall'oculare. Lagrange ha dimostrato generalmente (1), che in qualunque stromento ottico l'immagine è ingrandita rispetto all'oggetto visto dal centro dell'obbiettivo nella proporzione del diametro dell'obbiettivo al diametro del piccolo cerchio illuminato sull'oculare. Questa legge generale conduce a due conseguenze importanti. Essa offre un mezzo facile per conoscere l'amplificazione d'uno stromento; poichè non vi è che misurare il diametro dell'obbiettivo, e quello del cerchietto su citato, che qualunque sia la costruzione dello stromento, qualunque sia il numero delle lenti o specchi di cui è composto, non è neppur necessario di

(1) Mémoires de l'Acad. de Berlin an. 1803. *Sur une loi générale d'Optique.*

saperlo, l'amplificazione starà nel rapporto delle due misure prese (1).

In secondo luogo come le intensità della luce nel pennello incidente ed emergente sono inversamente proporzionali alle aree dell'obbiettivo e del cerchio illuminato sull'oculare, e ciascuna porzione dell'oggetto e dell'immagine si trova pure ingrandita nella stessa proporzione, ne viene, come abbiamo già notato, che la chiarezza di ciascun punto dell'immagine vista in uno stromento ottico, e dell'oggetto guardato alla vista semplice sono sempre eguali. Questa regola è generale se il pennello lucido che sorte dall'oculare è di un diametro più grande dell'apertura della pupilla, se fosse minore, converrebbe diminuire la chiarezza dell'immagine nel rapporto del quadrato del diametro dello stesso pennello a quello del diametro della pupilla. Si deve di più osservare che in questa regola si viene a trascurare tutta la luce riflessa od assorbita dalle lenti, o, se vi sono specchi, quella estinta nelle riflessioni dei medesimi, che giunge quasi alla metà della luce incidente per ogni riflessione.

7. Ritornando al telescopio astronomico, determiniamo la grandezza del campo che l'occhio situato sull'asse ad una piccola distanza dall'oculare può scoprire ad un tratto. Ripetendo sulla fig. 124 gli stessi ragionamenti che abbiamo usato pel canocchiale galileiano sulla fig. 121, e quindi cambiando f in $-f$ nella formola (2), si trova che il campo è espresso da, (Vedasi la Nota II)

$$(4) \qquad -\frac{\frac{f}{F}A - p}{h - \frac{F}{f}a};$$

(1) Per ottenere con precisione queste misure in un telescopio si fa uso d'uno strumento che si chiama *dinametro*. Si applica al canocchiale diretto al sole, o da un punto illuminato del cielo un coperchio con un foro circolare nel mezzo d'un diametro ben misurato e d'un poco minore di quello dell'obbiettivo, e dalla parte opposta, vale a dire all'oculare si applica il dinametro. Questo stromento consiste d'una lamina sottile di madreperla o di cristallo, sulla quale sono tracciate delle linee assai sottili ed equidistanti fra loro, per esempio di $0^{mm},1$, e che sono rese visibili ed ingrandite per mezzo di una o più lenti convergenti connesse collo stesso stromento. Il pennello cilindrico di luce, che sorte dall'oculare illumina la lamina del dinametro e vi dipinge un cerchietto, e si conta il numero delle divisioni o degli intervalli delle linee che si trovano comprese in questo cerchietto illuminato, con che si ottiene la misura del suo diametro, che è evidentemente eguale a quello dei cerchietto che si vede sull'oculare.

quando la chiarezza è completa; e cambiando p in $-p$, il limite dell' oscurità è dato da

$$(4)' \qquad -\frac{\frac{f}{F}\Delta + p}{h - \frac{F}{f}a};$$

dove si osserverà che ora $h = F + f$, e che il segno — che precede la formola indica soltanto che l' immagine è invertita.

Come il denominatore di queste formole può diminuire quanto si vuole col prendere per a un valor conveniente, si vede che con questo canocchiale si potrebbe abbracciare un campo qualunque. Ma il buon effetto delle lenti, e le nostre formole esigono che le inclinazioni dei raggi lucidi agli assi delle lenti siano sempre piccole. Se si permettesse a dei raggi molto obliqui di penetrare nel cánocchiale, le forme degli oggetti sarebbero sfigurate, e la visione confusa. In questo canocchiale si riduce perciò il campo per mezzo di diafragmi, posti nell' interno dei tubi, i quali escludono i raggi che potrebbero pervenire troppo obliquamente agli assi, e si tiene l' occhio poco discosto dall' oculare, limitando convenientemente il campo.

8. L' effetto del canocchiale kepleriano si può anche spiegare dicendo, che consiste nel ricevere coll' obbiettivo i raggi paralleli di luce di ciascun punto d' un' oggetto assai lontano, e formare così un' immagine di esso vicino a noi, e poi guardare quest' immagine con una lente convergente di un corto fuoco, la quale ce la fa apparire ingrandita, nello stesso modo che un piccolo oggetto è veduto assai più grande con un microscopio semplice. (Lezione prec. art. 14.)

9. *Microscopio composto.* La stessa costruzione del canocchiale kepleriano serve anche pel microscopio composto, colla differenza che pel primo s' impiega un' obbiettivo più grande e d' un fuoco più lungo, e pel secondo un' obbiettivo più piccolo e d' un fuoco più corto, il quale viene accostato all' oggetto che si vuole osservare.

Sia $o\,o'$ (fig. 125) un oggetto assai piccolo, se a questo si avvicina una lente obbiettiva convergente di modo che la distanza, $OA = D$, della lente dall' oggetto sia soltanto un po' maggiore della distanza focale principale, F, della medesima, si formerà al di là della lente in $i\,i'$ un' immagine che sarà tanto più grande dell' oggetto, quanto nella formola (1)';

$$\frac{1}{\Delta}+\frac{1}{D}=\frac{1}{F}$$

data all'articolo 9 della Lezione precedente, Δ risulterà maggiore di D. La sola ispezione della figura basta a convincerci di ciò. Se si chiama O la grandezza dell'oggetto

$$O\frac{\Delta}{D}=i\,i'$$

sarà quindi la grandezza dell'immagine. Osservisi ora quest'immagine con un'altra lente, $\omega\,\omega'$, convergente, posta a tale distanza, $I\,C=f$, che il suo fuoco principale coincida col luogo I dell'immagine. Quest'immagine, considerata come un nuovo oggetto visto attraverso alla lente $\omega\,\omega'$, sarà veduta distintamente per mezzo dei pennelli di luce che hanno i vertici in essa, ed i cui raggi sono resi paralleli dalla stessa lente, e sottenderà l'angolo visuale $i\,C\,i$, il cui valore, atteso la sua piccolezza, potrà rappresentarsi col rapporto

$$\frac{i\,i'}{C\,I}=\frac{O}{f}\cdot\frac{\Delta}{D}:$$

o vero sostituendo per $\frac{\Delta}{D}$ il valore che somministra la prima delle precedenti equazioni

$$\frac{i\,i'}{C\,I}=\frac{O}{f}\cdot\frac{1}{\frac{D}{F}-1}.$$

Rispetto ai microscopi si chiama *amplificazione* il rapporto dell'angolo visuale, sotto cui è veduta l'immagine, a quello sotto cui sarebbe veduto l'oggetto ad occhio nudo alla distanza h della visione distinta. Quest'ultimo angolo, per la sua piccolezza, è evidentemente espresso da

$$\frac{O}{h}.$$

Dividendo dunque l'angolo visuale precedente per questo, si avrà la formola per l'amplificazione del microscopio, che sarà

$$\text{(5)}\qquad \text{ampl}=\frac{h}{f}\cdot\frac{1}{\frac{D}{F}-1}.$$

10. Nei microscopi composti il diametro del pennello emer-

gente dei raggi inviati da un punto dell' oggetto è comunemente più piccolo dell' apertura della pupilla, ed avendo riguardo a questa circostanza, ed all' altra che il confronto è idealmente fatto, come se l' oggetto fosse alla distanza h dall' occhio, si può valutare la chiarezza nel seguente modo.

Chiamando uno la quantità di luce che riceverebbe l' unità di superficie, da un punto dell' oggetto situato sull' asse alla distanza uno, quella che riceve l' obbiettivo alla distanza D, con un' area πA^2, A essendo il suo semidiametro, sarà espressa da

$$\frac{\pi \cdot A^2}{D^2}.$$

La quantità di luce che riceverebbe la pupilla alla distanza h della visione distinta sarà parimenti espressa da

$$\frac{\pi p^2}{h^2},$$

p dinotando la semiapertura della pupilla.

Siccome, quando il pennello emergente è più piccolo della pupilla, tutta la quantità di luce entra in essa, il rapporto delle due quantità di luce che riceve l' occhio armato e disarmato del microscopio composto verrà dato da

$$\frac{A^2}{p^2} \cdot \frac{h^2}{D^2}.$$

Dividendo questo rapporto pel quadrato dell' ingrandimento, il quoziente dinoterà, come abbiamo altre volte ripetuto, la chiarezza di un punto dell' immagine rispetto a quella di un punto dell' oggetto visto ad occhio nudo alla distanza della visione distinta. La chiarezza sarà quindi data, facendo uso per l' amplificazione della formola precedente, da

$$(6) \qquad \frac{A^2}{p^2} \cdot \frac{f^2}{D^2} \left(\frac{D}{F} - 1\right)^2.$$

In quanto al campo, esso sarà espresso dalla stessa formola (4) che serve pel telescopio astronomico, art. 7.

Quanto fu esposto può dare un' idea del principio, su cui è fondato l' effetto del microscopio composto. Nella esecuzione pratica la sua costruzione è resa più complicata coll' introduzione di altre lenti accessorie, l' oggetto delle quali non potremmo bene specificare colle sole nozioni sulle lenti, che ci fu dato di far co-

noscere (1). La costruzione dei microscopi è stata condotta ad un alto grado di perfezione da Amici in Italia, da Chevalier in Francia, da Tully, Pritchard e Dollond in Inghilterra.

11. Nel telescopio astronomico come pure nel microscopio composto s' impiega con vantaggio in vece di un oculare semplice, cioè fatto da una sola lente convessa, un oculare composto fatto di due lenti piano-convesse.

Due sorte di oculari composti comunemente s' impiegano. Quelli della prima sorte, fig. 126, sono stati proposti e costrutti da Huyghens (2), e si chiamano oculari *negativi*. La prima lente piano-convessa ha una distanza focale principale maggiore della seconda, che è pure piano-convessa. Quando questo oculare fu proposto il rapporto assunto delle distanze focali delle sue lenti era di 3 : 1; posteriormente gli artefici hanno diminuito questo rapporto sino a differire poco da 4 : 3 o da 5 : 4. Le due lenti sono poste in modo che amendue voltano la loro convessità verso l' oggettivo, e stanno ad un intervallo della metà della somma delle loro distanze focali principali, ed anche un poco meno. Quella che ha una distanza focale maggiore stà dalla parte più vicina all' obbiettivo, raccoglie i coui lucidi che questo forma prima che si concentrino nel fuoco rispettivo, e perciò si chiama lente *collettiva;* l' altra lente di un fuoco più corto sta dalla parte dell' occhio ed è propriamente detta la lente *oculare.*

Nei telescopi kepleriani destinati ad usi astronomici e geodetici, nei quali fa bisogno d'avere nel fuoco dell'obbiettivo dei *fili di mira,* s' impiega invece un' oculare proposto da Ramsden, detto *positivo* (fig. 127), e composto pure di due lenti piano-convesse, ma le superficie piane sono rivolte in verso contrario una in faccia all' obbiettivo l'altro all'occhio. Queste due lenti hanno la loro distanza focale principale eguale, ed in Inghilterra si ha l'uso di porle ad una distanza reciproca poco minore di quella dei loro fuochi principali, ma Fraunhofer ha costrutto dei buoni oculari positivi riducendo questa distanza anche ad $\frac{1}{3}$ od $\frac{1}{4}$.

La combinazione delle due lenti equivale, in quanto all'effetto dell' ingrandimento, ad una sola lente che avesse per distanza focale principale

(1) Al lettore che desidera d' istruirsi completamente nella teoria degli stromenti ottici non manca opportunità di farlo consultando il bel Trattato gia altrove lodato dal Ch. Prof. Santini. Padova MDCCCXXIII.

(2) Huyghens. Dioptrica Prop. LI.

$$\varphi = f. \frac{\alpha}{1 + \alpha - \beta}$$

α, e β dinotando i rapporti della distanza focale principale della lente interna, e della distanza reciproca delle due lenti alla distanza focale principale della lente esterna dalla parte dell'occhio dinotata dalla lettera f. (Vedasi la Nota III). Questo valore di φ è quello che deve impiegarsi o intendersi sostituito nelle formole (3) (5) quando l'oculare è composto. Lo scopo, per cui si sono introdotti gli oculari composti, è in gran parte quello di riparare ai difetti dei quali andiamo a parlare rispetto agli obbiettivi.

12. *Obbiettivi acromatici.* Una circostanza degna di tutta l'attenzione, per la sua importanza nella costruzione dei telescopi o microscopi, è la precisione con cui deve essere formata dall'obbiettivo l'immagine dell'oggetto che viene amplificata dall'oculare. Ogni piccola imperfezione in quest'immagine vedendosi molto ingrandita produce un'alterazione sensibile nella rappresentazione dell'oggetto. Ora la dimostrazione data che i raggi partiti da ciascun punto dell'oggetto sono dall'obbiettivo resi convergenti in forma di cono, e che sono tutti concentrati in un sol punto nel fuoco, è esatta soltanto per quei raggi che si scostano pochissimo dall'asse. Se il diametro dell'obbiettivo è un po' grande i raggi che cascano vicini al bordo si riuniscono in un luogo, comunemente diverso, l'immagine del punto diviene confusa, e gli ottici chiamano questa deviazione di concorso dei raggi incidenti, lontani dall'asse, *aberrazione di sfericità.* Ma oltre a questa aberrazione ne esiste un'altra molto più sensibile, che proviene dall'essere l'indice di rifrazione diverso pei diversi colori, per cui il fuoco dei raggi rossi differisce da quello dei violetti ed in generale degli altri colori. I fuochi dei diversi colori riuscendo inegualmente situati nello spazio e non compenetrandosi, le immagini parziali corrispondenti non si sovrappongono bene, e l'immagine risultante dell'oggetto riesce colorata nei contorni. Quest'imperfezione si chiama *aberrazione di refrangibilità* o *prismatica.* Eulero indicò il primo la possibilità di correggere quest'aberrazione impiegando sostanze diverse, fondandosi sull'esempio dell'occhio, che, costrutto di diversi umori, è esente da un tale difetto, e Giovanni Dollond scoprì la differenza dei poteri dispersivi de' diversi vetri, e fu il primo che costruì con principii certi un telescopio refrattore

senza colori (1). Gli obbiettivi che godono della proprietà d'essere esenti da ogni aberrazione sono detti *acromatici* (2). (Vedasi la Nota IV).

13. *Telescopi di riflessione.* Newton, che aveva dato a conoscere la teoria della dispersione della luce, credendo che gli spettri solari fatti da diverse sostanze refrangenti fossero tutti simili fra loro, giudicò l'aberrazione di refrangibilità un'ostacolo insuperabile nella costruzione dei canocchiali rifrattori, e pensò a sostituire alle lenti gli specchi. Nel telescopio, ch'egli immaginò, uno specchio grande posto nel fondo di un tubo, (fig. 128), fa l'ufficio di lente obiettiva. Siccome l'immagine viene riflessa da questo specchio dallo stesso lato in cui sta l'oggetto, e l'osservatore non potrebbe guardarla direttamente con un'oculare senza intercettare col suo capo i raggi provenienti dall'oggetto, Newton impiegò l'espediente di porre, verso la bocca del tubo sull'asse dello specchio obbiettivo, un secondo specchietto piano inclinato di 45° col detto asse in modo che riflettesse i raggi formanti l'immagine da un lato, ed applicò da questo lato del tubo un sistema oculare per osservarla ingrandita. Hadley ha sostituito allo specchietto di Newton, il prisma isoscele di cristallo di cui abbiamo spesso fatto cenno. (Lez. XXIII, art. 12). La teoria di questo stromento e le formole per calcolarne gli effetti sono quelle stesse che abbiamo dato pei canocchiali rifrattori, poichè le formole fondamentali che danno le distanze focali degli specchi e delle lenti non differiscono fra loro.

14. *Telescopio Gregoriano.* Gregory aveva proposto avanti Newton l'uso di due specchi per costruire un telescopio, ma la sua costruzione non fu messa in esecuzione che dopo quella di Newton. Uno specchio grande concavo forma un'immagine reale dell'oggetto prima che i raggi riflessi arrivino ad un secondo piccolo specchio pure concavo e situato sullo stesso asse (fig. 129). Il luogo di questo specchietto è reso un po' variabile per adattarlo alla vista del-

(1) Pei dati storici di questa scoperta può consultarsi l'articolo III delle Addizioni del P. Pezenas al secondo volume della Traduzione francese dell'Ottica di Smith.

(2) Acromatico. Voce derivata da α proposizione privativa, e χρωμα colore. Sir. J. Herschel ha proposto di chiamare questi obbiettivi *aplanatici* perchè non solo correggono gli errori di colorazione o refrangibilità, ma anche quelli di sfericità. Questo vocabolo è dedotto dalla proposizione α senza e πλανος *errore*, cioè senza errori.

l'osservatore, ma la sua distanza dallo specchio grande è all'incirca eguale alla somma delle distanze focali dei due specchi. Nel centro dello specchio grande vi è un foro, dietro il quale si applica un'oculare composto della prima specie o negativo, art. 11, che forma una seconda immagine inversa colla prima e mostra così l'oggetto ingrandito e diritto.

15. *Telescopio di Cassegrain.* Quasi nello stesso tempo Cassegrain in Francia ha proposto un telescopio simile al precedente, ma nel quale lo specchietto in luogo di essere concavo è convesso (fig. 130). I raggi componenti i pennelli lucidi emanati dai varii punti dell'oggetto sono riflessi, prima che formino un'immagine reale, sensibilmente paralleli all'asse del telescopio. In questo modo gli errori d'aberrazione di sfericità dei due specchi si correggono in parte per l'opposta natura delle due superficie; ed il telescopio riesce più corto, poichè il piccolo specchio convesso deve essere distante dal grande soltanto circa della differenza delle due distanze focali principali. Un oculare composto negativo è applicato dietro un foro praticato nel centro dello specchio grande. La prima lente di quest'oculare forma un'immagine dell'oggetto che si vede ingrandita per mezzo della seconda lente, ma in posizione rovesciata.

Per intendere in un modo semplice l'effetto del riflessore di Gregory o Cassegrain, si può osservare che il grande ed il piccolo specchio formano ad un dipresso un telescopio, il primo della specie Kepleriana, il secondo Galileiana. I raggi componenti i diversi pennelli inviati dai punti dell'oggetto essendo paralleli o pochissimo inclinati fra loro. Nei telescopii comuni l'ingrandimento di questo primo sistema di specchi è fra 4 e 7 volte. Il sistema degli oculari fa poi l'officio di un refrattore Kepleriano, ed ingrandisce la prima immagine altre 8 o 10 volte.

16. *Telescopio d'Herschel.* Quando Sir. W. Herschel ebbe costruito il suo grande specchio di 48 pollici inglesi d'apertura e 40 piedi di distanza focale, concepì l'idea d'evitare la perdita di luce che si fa nella seconda riflessione sullo specchietto piano, o sul prisma di cristallo, come nel sistema di Newton, applicando internamente ad un lato della bocca del tubo il sistema delle lenti oculari col loro asse diretto al centro dello specchio. Le grandi dimensioni di questi telescopi permettono di usare questo mezzo senza che il capo dell'osservatore impedisca ai raggi dell'oggetto di cadere sullo specchio grande: ma si ha il piccolo inconveniente che si osserva un po' obliquamente, e soltanto delle immagini formate fuori dell'asse centrale dello stromento.

Ad eccezione dei grandi telescopi rifrattori, quelli comuni cascano ogni giorno più in disuso per la difficoltà di conservarli a lungo senza che si appannino, e per la facilità con cui ora si costruiscono dei buoni rifrattori acromatici.

LEZIONE XLI.

Spiegazione di alcuni fenomeni metereologici luminosi.

Porrò termine alle Lezioni di questo corso col dare un saggio di un' altra applicazione delle teorie esposte alla spiegazione di qualche fenomeno meteorico luminoso.

La dispersione dei raggi di diverso colore operata per mezzo della rifrazione ci somministra la spiegazione di uno dei fenomeni più mirabili della natura, che è quello dell' apparizione dell' iride o arco baleno.

1. Esponiamo prima il modo con cui questo fenomeno suole apparire. Attendendo alle circostanze atmosferiche nelle quali l' iride si mostra in cielo, si può notare che essa si vede soltanto le volte che una nube si risolve in pioggia od in piccole gocciole d' acqua da una lato dell' orizzonte, mentre dal lato opposto risplende il sole poco elevato sopra di esso. L' arco che presenta l' iride ha la forma di una porzione di circolo il cui centro è il punto diametralmente opposto a quello occupato dal sole sulla sfera celeste. Spesso non si osserva che un solo arco che offre i colori dello spettro solare, il rosso essendo più alto o sul bordo esteriore dell' arco, ed il violetto più basso o sul bordo interiore. Talvolta si osservano due archi concentrici a piccola distanza uno dall' altro, ma allora i colori del secondo sono più deboli e sono disposti in un ordine inverso.

2. La circostanza di doversi trovare goccie d' acqua cadenti o sospese in aria dalla parte ove l' iride appare, le quali siano percosse dai raggi del sole che provengono dalla parte opposta dell' orizzonte, conduce subito a pensare che l' apparizione dei colori sia dovuta ad una rifrazione che i raggi del sole subiscono in quelle goccie, ma come l' osservatore trovasi rivolto verso la parte opposta del cielo dalla quale i raggi del sole procedono, è evidente che essi non potrebbero pervenire al suo occhio se non fossero, almeno una volta riflessi dalle goccie dopo aver penetrato in esse.

Le piccole masse d' acqua che formano le goccie in cui si risolve la nube potendo obbedire liberamente alla gravità, e non soffrendo che una tenue resistenza dall' aria, non saranno sensibilmente soggette nella loro conformazione che alle azioni molecolari dei loro elementi; e quindi assumeranno una forma sferi-

ca, poichè non v' è ragione che queste forze predominino più da una parte che dall' altra e diano una diversa curvatura alla superficie della goccia. Quantunque le gocce quando sono cadenti in pioggia non facciano che passare, pei diversi punti sottoposti alla nube, pure come si succedono con frequenza le une alle altre noi possiamo sempre considerare che su di un raggio visuale qualunque esistono sempre una o più goccie atte a produrre le rifrazioni e riflessioni che il fenomeno esige.

3. Premesse queste considerazioni esaminiamo da prima il corso di un raggio di luce che, rifrangendosi, penetra una goccia sferica d' acqua, e che dopo d' essere una o più volte in parte riflesso nell' interno, sorte rifratto una seconda volta da essa.

Sia dunque IKE (fig. 131) la sezione di una goccia sferica d' acqua il cui centro sia in C, ed SI un raggio di sole nello stesso piano che cade sotto l' incidenza $SIN = i$. Chiamando r l' angolo di rifrazione KIC la nota legge di Snellius ci darà

$$(1) \qquad \sin i = n \sin r.$$

Osserveremo che il valore di n è diverso pei raggi di diverso colore, e che si può prendere

$$\text{pei raggi rossi } n = \frac{108}{81} \quad , \quad \text{e pei raggi violetti } n = \frac{109}{81}.$$

Sia che il raggio si rifletta una sol volta come nella figura 131, due volte come nella figura 132, tre volte come nella 133, ed in generale un numero ν di volte, sempre dopo che sarà sortito dalla goccia rifrangendosi una seconda volta, le sue parti incidente ed emergente SI ed ET, od i loro prolungamenti s' incontreranno in un punto D tale, che conducendo per questo punto e pel centro C del circolo una retta DCK, questa dividerà in due parti simmetriche il cammino percorso dal raggio. Questa proprietà è facile a riconoscersi, osservando che per essere gli angoli d' incidenza e di riflessione eguali, le corde che percorre il raggio nell' interno devono essere tutte eguali fra loro, e che prima d' entrare e dopo uscito il raggio deve fare angoli eguali colle corde estreme. L' angolo IDE che fa la porzione incidente del raggio colla emergente chiamasi angolo di *deviazione* ed è l' espressione di quest' angolo che ora noi dobbiamo cercare.

Se si osserva che i triangoli che avessero il loro centro in C e per base una delle corde percorse del raggio avrebbero tutti i loro angoli alla base eguali ad r, e perciò l' angolo al centro C

eguale a $\pi - 2r$ (π essendo la semicirconferenza) si scorge subito che l'arco IE che abbraccia il totale cammino interno del raggio deve essere eguale a $(\nu + 1)(\pi - 2r)$ e quindi l'arco IK che ne è la metà sarà eguale a $\frac{\nu+1}{2}(\pi - 2r)$.

Pel centro C conduciamo il raggio di circolo CG parallelo al raggio di luce incidente SI. L'angolo ICG riuscirà eguale all'angolo d'incidenza che abbiamo chiamato i, e l'angolo GCD od il suo supplemento sarà la metà dell'angolo di deviazione, ed è facile il vedere che l'arco KG sarà eguale tanto a $KI + IG$ quanto a $\pi \pm \frac{IDC}{2}$, prendendo il segno inferiore quando G cade dalla stessa parte della linea DK di quello in cui sta il punto d'incidenza I ed il superiore quando cade dalla parte opposta.

Ora l'arco KI è espresso, come abbiamo veduto sopra, da $\frac{\nu+1}{2}(\pi - 2r)$, (diminuendo, se occorre, questo valore del numero di circonferenze intere che potesse comprendere) e l'arco IG è la misura dell'angolo che abbiamo denominato i; dunque indicando con Δ l'angolo di deviazione IDE e paragonando i due valori suddetti dell'arco KG, si avrà l'equazione

$$(2) \qquad \frac{\nu+1}{2}(\pi - 2r) + i = \pi \pm \frac{\Delta}{2}.$$

4. Il valore di Δ che risulta da questa equazione combinata con quella segnata (1) varia in generale cambiando i. Così due o più raggi paralleli, cadendo su più punti contigui di una goccia a cui corrispondano dei valori di i un poco differenti, faranno al sortire degli angoli differenti colla linea della loro direzione entrando, usciranno cioè un poco divergenti, si separeranno sempre più proseguendo il loro cammino e giungendo all'occhio saranno troppo dispersi ed incapaci, secondo il principio esposto all'art. 1 della Lezione XXXVIII, di produrre un'immagine. Questi raggi si chiamano perciò *inefficaci*. Ma fra tutti i raggi solari che possono incontrare la superficie delle goccie sotto varie direzioni, ve ne possono però essere alcuni in una certa direzione che vanno a sortire ancora paralleli, e questi potendo eccitare nell'occhio un'immagine, si chiamano *efficaci*. (Vedasi la figura 134). Si vede infatti dalla formola (2) che se i avesse un valore tale che quando i variasse di una piccola quantità, che rappresenteremo con di, l'angolo r venisse corrispondentemente a variare di una

piccola quantità dr in modo che fosse

$$(3) \qquad -(\nu+1)\,dr + di = 0$$

il valore di Δ rimarrebbe costante, e perciò i raggi contigui corrispondenti a questo valore di i sarebbero paralleli all'uscire, come lo erano prima d'entrare.

Cercando colla formola (1) quale è l'angolo i che variato di una piccola quantità di produce una variazione dr nell'angolo di rifrazione r che soddisfaccia all'equazione (3) si trova (Vedasi la Nota 1),

$$(4) \qquad \cos i = \sqrt{\frac{n^2-1}{(\nu+1)^2-1}}$$

e quindi si ha

$$(5) \quad \cos r = \frac{\nu+1}{n}\cos i\,, \quad (6) \quad \Delta = \pm\left((\nu-1)\pi - 2(\nu+1)r + 2i\right).$$

Ecco le condizioni in cui devono trovarsi i raggi del sole riflessi e rifratti dalle gocce d'acqua, onde siano efficaci, od atti a produrre nell'occhio una sensazione speciale.

5. Principiamo dal considerare il caso più semplice in cui non vi è che una sola riflessione e per cui $\nu = 1$; ponendo $n = \frac{108}{81}$ onde avere i valori corrispondenti ai raggi rossi, e poi $n = \frac{109}{81}$ per avere i valori corrispondenti ai raggi violetti, il calcolo delle tre precedenti equazioni ci darà

Pei raggi rossi	$i = 59°.\,23'$	$r = 40°.\,12'$	$\Delta = 42°.\,2'$
Pei raggi violetti	$i = 58°.\,40'$	$r = 39\,.\,24$	$\Delta = 40\,.\,17.$

I raggi efficaci rossi dovranno dunque, all'uscire, fare coi raggi incidenti un angolo di $42°.\,2$ e quelli violetti uno di $40\,.\,17$, onde poter formare un'immagine nell'occhio dell'osservatore.

Dal luogo dell'occhio dell'osservatore immaginiamo una retta OP, fig. 135 che passi pel centro del sole; la direzione di questa retta sarà anche quella di tutti i raggi solari SR, SV che partono dal disco del sole ed arrivano alle gocce d'acqua, perchè la distanza del sole essendo grandissima in confronto di quelle che si contano sulla superficie della terra, tutte queste rette potranno considerarsi come parallele. Se dunque intorno alla prima retta immaginiamo descritto un cono il cui vertice sia nel luogo dell'occhio dell'osservatore, e la cui semi-apertura o semi-angolo

al vertice sia di 40°. 17' i raggi violetti *VO* usciti dalle goccie che correranno lungo questa superficie conica saranno efficienti e porteranno all' occhio dell' osservatore l' immagine di un cerchio violetto: descrivendo invece un cono collo stesso asse ma con una semi-apertura di 42°. 2' l' osservatore vedrà secondo il contorno di questo un cerchio rosso. I raggi di rifrazione media fra i rossi e i violetti formeranno le immagini di tanti altri cerchi dei colori successivi dello spettro prismatico, che riempiranno lo spazio intermedio fra i due primi cerchi, e presenteranno così all'occhio una banda circolare della larghezza di 1°. 45' variamente colorata.

6. Non abbiamo considerato se non i raggi partiti dal centro del sole: ma come tutti i punti del disco solare inviano raggi di luce, per considerarli in particolare fa bisogno condurre pel luogo dell' occhio dell' osservatore e per ciascuno di essi tante rette che servano di altrettanti assi ai coni rispettivi, come si è fatto pel centro. Ciascun punto luminoso del disco formerà così la propria banda colorata concentrica col suo asse. La banda appartenente ai raggi del punto di mezzo del lembo inferiore del sole, sarà quindi più alta dell'angolo che sottende il semi-diametro solare o sia di 15', quella prodotta dai raggi partiti del vertice del sole si troverà invece di 15' più bassa che non quella dei raggi del centro. La sovrapposizione di tutte le bande colorate appartenenti ai punti luminosi intermedii formerà propriamente l' iride che avrà quindi una larghezza di 2°. 15', e come verso il mezzo le bande vengono a sovrapporsi con parti differentemente colorate, i colori nel mezzo saranno di un ordine composto, e meno omogenei che sui lembi dell' iride ove il rosso ed il violetto saranno più puri.

7. Facciamo ora $\nu = 2$ per considerare il caso in cui succedono due riflessioni interiori. Cominceremo dal notare, che come non tutta la luce è riflessa a ciascuna riflessione ma in parte si rifrange e sorte, così i raggi di luce che emergono dopo due riflessioni devono essere più deboli, e quindi l' iride che ne risulta deve essere più smorta, come infatti si osserva.

Pel valore $\nu = 2$, le formole (4), (5), (6) danno

Pei raggi rossi	$i = 71°. 50'$	$r = 45°. 27$	$\Delta = 50°. 59'$
Pei raggi violetti	$i = 71 . 26$	$r = 44 . 47$	$\Delta = 54 . 09.$

Ripetendo il discorso che abbiamo fatto per l' arco primario, l' osservatore vedrà dunque, fig. 135, un cerchio di color rosso

secondo le visuali che faranno un angolo di 50°. 59′ intorno alla retta che va da lui al centro del sole, prolungata dalla parte opposta, come asse; ed un cerchio di color violetto secondo i raggi visuali che faranno collo stesso asse un angolo di 54°. 9′. Lo spazio intermedio fra questi due cerchi la cui distanza sottende un angolo di 3°. 10′ sarà tutto ripieno di cerchi d'altri colori di rifrangibilità intermedia. Il color rosso sarà dunque interno ed il violetto esterno nell'arco secondario dell'iride, al rovescio di ciò che succede nell'arco primario. L'arco totale dell'iride formato dalla sovrapposizione di tutte le bande colorate prodotte da tutti i punti del disco del sole, verrà poi ad acquistare da ciascuna banda una larghezza maggiore di quanto è l'angolo che sottende il diametro del sole, o sia maggiore di 30′ e quindi sarà di 3°. 40′. I valori di tutti questi archi sono stati verificati con misure dirette su varie iridi osservate da Newton, al quale propriamente si deve il complemento della spiegazione di questo bel fenomeno metereologico.

8. Se si continuasse a fare nelle formole (4), (5), (6), $\nu = 3$ e poi $\nu = 4$, per avere gli angoli d'incidenza di rifrazione e di deviazione corrispondenti al terzo e quart'arco dell'iride, si troverebbe che questi archi dovrebbero essere situati dallo stesso lato in cui si trova il sole, e circonderebbero quest'astro, il primo alla distanza di 40°, ed il secondo a quella di 46°. Come la luce che esce dalle goccie d'acqua dopo tre o quattro riflessioni è assai poca, i colori di questi archi sarebbero assai smorti, e riescono poi del tutto invisibili, perchè vengono offuscati dalla luce del sole che irradia a poca distanza da essi.

9. Oltre ai due archi descritti si vedono talvolta principalmente lungo l'arco primario e nell'interno di esso alcuni altri archi composti di pochi colori, i quali si chiamano *archi soprannumerarii*. Langwith, Dacval, Boscowich e varii altri hanno parlato dell'apparizione di questi archi soprannumerarii. La descrizione che Langwith ha dato nel volume XXXII delle Transazioni filosofiche è delle più precise. Ecco come si esprime. « Il 21 di « Agosto 1722 circa alle cinque e mezzo pomeridiane, con una « temperatura media ed il vento al nord-est si osservarono le « seguenti apparenze. I colori dell'arco primario erano come al « solito, soltanto il violetto inclinava alquanto al rosso, ed il suo « contorno era bene definito: al di sotto di esso vi era un arco « di color verde, la cui parte superiore inclinava ad un giallo « vivo e l'inferiore ad un verde più fosco: al di sotto di questo

« si vedevano alternativamente due archi di un rosso di porpora « e due di verde. Al di sotto di tutto scorgevasi una debole ap- « parenza di un altro arco porpureo il quale svaniva e tornava « più volte con tale frequenza, che non potevamo fissare i nostri « occhi su di esso. L'ordine dei colori era dunque, arco prima- « rio. I. Rosso aranciato, giallo, verde, indaco, azzurro, por- « pora. II. Verde chiaro, verde oscuro, porpora. III. Verde, por- « pora. IV. Verde porpora debole evanescente. Noi avevamo così « quattro ordini di colori, e forse il principio di un quinto: « perchè non pongo dubbio che quello che io chiamo porpora « non fosse un misto di violetto della serie precedente col rosso « della serie seguente, e che il verde nascesse dalla mistura di « tutti i colori intermedii. Vi mando questa relazione non sulla « sola fiducia ne' miei propri occhi; poichè erano in mia compa- « gnia un sacerdote e quattro altri signori che invitai ad osservare « attentamente i colori, e tutti convennero che apparivano tali « quali io li ho ora descritti. Vi sono due cose che meritano d'es- « sere notate, poichè possono dirigerci in qualche modo alla solu- « zione di questo curioso fenomeno. La prima è che la larghezza « della prima serie di colori eccedeva di tanto quella di ciascun'al- « tra, che per quanto potei giudicare le eguagliava tutte prese « insieme. La seconda è, che non ho mai osservato gli ordini « inferiori dei colori nelle parti più basse dell'iride, quantunque « esse fossero ben spesso incomparabilmente più vivide delle parti « più elevate sotto le quali i colori apparivano. Ho notato questa « circostanza tante volte che potrei a stento risguardarla come « accidentale ».

10. Pamberton pare il primo che nel n.° 135 delle Transazioni filosofiche abbia avuto il pensiero di spiegare il fenomeno di questi archi soprannumerarii per mezzo degli accessi, o come ora si dice delle interferenze dei raggi che sortono riflessi dalle goccie d'acqua. Ma i raggi che egli considerò essendo soltanto quelli sparpagliati dalla riflessione irregolare sulla faccia posteriore *K* della goccia, questi raggi sembrano troppo deboli per produrre un effetto sensibile. Il D.r Young in una memoria letta alla Società reale il 24 Novembre 1803 e pubblicata nelle Transazioni filosofiche ha dato il passo più importante verso il compimento di questa spiegazione, facendo notare che oltre i raggi corrispondenti alla deviazione massima che formano l'iride primaria, sortono dalle goccie altri raggi paralleli con una deviazione minore, i quali benchè vadano diminuendo d'intensità, più si scostano dai

primi, sono però atti colle loro interferenze a produrre gli archi colorati.

Per intendere come ciò avvenga basta gettare gli occhi sulla figura 134. Tanto il raggio 1,1 quanto il raggio 4,4 posti l'uno da un lato l'altro dall'altro lato dei raggi 2,2 e 3,3 che producono l'iride ordinaria, si piegano al sortire dalla goccia internamente all'angolo 2 *D T* di deviazione massima, talchè la loro deviazione dalla direzione d'incidenza *S I* è minore. Ora è facile di concepire che si potranno sempre trovare due punti sulla circonferenza del cerchio che rappresenta la goccia, l'uno da un lato, l'altro dall'altro lato dell'arco 23, tali che i raggi che penetrano per questi punti nella goccia escano paralleli, e giungano all'occhio nella condizione propria per produrre la visione. Il cammino percorso da un raggio e quello percorso dall'altro, tanto esternamente che internamente alla goccia, saranno diversi e percorsi con velocità diversa; e secondo che questi cammini differiranno di un numero pari o dispari di semi-ondulazioni, i due raggi concorderanno od interferiranno, dal che ne nasceranno delle frange. Calcolando quale deve essere il diametro della goccia onde la prima frangia di color rosso caschi sul violetto dell'arco ordinario, e poi si succedano quattro altre frange rosse nello spazio di due gradi, come le apparenze descritte da Langwith lo esigono, si trova che il diametro della goccia deve avere circa $\frac{1}{3}$ di millimetro (1). La continuazione di queste frange lungo un certo tratto dell'arco iride esige che in quel tratto siano disseminate nell'aria tante goccie tutte dello stesso diametro, e la difficoltà di trovarsi riunite tante goccie eguali rende rara l'apparizione di questo fenomeno e mancante nelle estremità inferiori dell'arco. Ma non è affatto improbabile che in varii casi e per un certo tratto d'altezza l'uniformità del processo con cui naturalmente si formano le goccie le faccia risultare tutte dello stesso diametro.

Facendo un ragionamento simile rispetto all'arco secondario di 54°, il quale è formato dai raggi che sortono dalle goccie dopo due riflessioni con una deviazione minima, si troverebbe che gli archi soprannumerarii, quando fossero visibili, dovrebbero essere esteriori, o dal lato opposto al sole.

11. *Aloni o corone.* Gli aloni o corone sono alcuni cerchi biancastri o colorati che circondano talvolta il disco della luna o del sole, quando l'atmosfera si mostra velata da qualche leggiero

(1) Vedasi la Nota II.

vapore. Gli aloni possono dividersi in due specie; alcuni sono piccoli formati da uno o più anelli concentrici coll'astro e contigui fra loro, nei quali il color rosso è situato estrinsecamente: altri sono più grandi di un raggio circa di 22° ½, od anche di 45° ed in questi il color rosso è dalla parte interna dell'anello; ciò che mostra che queste due specie d'aloni hanno un'origine diversa.

12. I piccoli aloni della prima specie sono, come Fraunhofer lo ha fatto vedere, dei fenomeni di diffrazione prodotti dai raggi che passano fra globuli di vapore disseminati in grande quantità nell'aria. Dalla teoria della diffrazione risulta che una piccola sfera investita da raggi paralleli forma dal lato opposto, su di un piano perpendicolare alla direzione dei raggi, degli anelli colorati. I punti della circonferenza su cui sono situati questi anelli sono tali che conducendo da essi un piano al centro della sfera, e poi due rette in questo piano alla estremità del diametro della sfera perpendicolare alla direzione dei raggi, queste due rette differiscono in lunghezza di 1, 3, 5, 7 ec. mezze ondulazioni. Da ciò che mostrano le formole date agli articoli 5 della Lezione XXVIII, ed 11 della Lezione XXIX risulta altresì che i diametri di queste circonferenze sono rispettivamente per globuli di diversa grandezza in ragione inversa dei diametri delle loro sfere. Ciò posto sia *a b* fig. 136, un globicino vescicolare di vapore, *L O* la direzione dei raggi luminosi provenienti dal sole o dalla luna, ed *O* l'occhio dell'osservatore situato su di uno dei punti dei detti anelli. L'occhio vedrebbe nella direzione *O a* un raggio del color dell'anello, il qual colore riesce pallido ed ammorzato dalla luce circostante. Tutti i globicini simili ad *a b* situati ad una certa distanza sul cono che sarebbe descritto intorno ad *O L* della retta *O a* prolungata indefinitamente (1) produrranno nel punto *O*, dove è situato l'occhio, lo stesso effetto, e l'osservatore vedrà intorno al disco dell'astro illuminante un anello circolare di color pallido. Dalla sovrapposizione degli anelli corrispondenti ai diversi colori si formerà l'alone colorato; e se i globicini saranno un pò differenti in grandezza, cosicchè gli anelli non riescano eguali, la sovrapposizione non sarà regolare, e si formerà un alone biancastro.

13. I grandi aloni sono probabilmente prodotti, come Ma-

(1) La linea *O a* a tutto rigore è un ramo d'iperbola, Lez. XXVII art. 10 e 11, ma l'asse non traverso è tanto piccolo, che questo ramo si confonde sensibilmente con una linea retta.

riotte lo mostrò il primo, da minutissimi cristalli d'acqua gelata che notano nell'aria a grandi altezze. L'esistenza di questi cristalli non è ipotetica, ma è provata dai viaggiatori nelle regioni nordiche dove appajono anche al livello del mare. Essi hanno la forma di prismi a base triangolare equilatera. Sia OS la direzione dei raggi provenienti dal sole o dalla luna, i quali per la grande distanza di questi astri possono considerarsi tutti paralleli. Sia P fig. 137, uno dei detti prismi di ghiaccio, il raggio $S'p$ cadendo su di esso si rifrangerà attraverso il prisma e poi sortirà in π, rifrangendosi una seconda volta, e come abbiamo visto al principio della Lezione XXIV, questi raggi si spiegheranno all'uscire come in un ventaglio. Per una posizione qualunque del prisma i raggi sortendo divergenti sarebbero *inefficaci* a produrre la visione. Ma fra tutte le posizioni del prisma ve ne ha una per la quale la deviazione del pennello emergente è minima, nella quale i raggi sortono sensibilmente paralleli e *efficaci* a dare la visione distinta. Questa posizione di cui si è fatto parola al principio della citata Lezione, è stata particolarmente considerata nella Nota I appartenente alla medesima, ove si è dimostrato che la deviazione minima Δ del raggio emergente dal raggio incidente si ottiene colle due formule

$$(5)\quad \sin E = n \sin 2F \quad ; \quad (6)\quad \Delta = 2E - F:$$

nelle quali F dinota l'angolo rifrangente del prisma, ed n l'indice di rifrazione, che pel ghiaccio è dato dal numero 1,308.

Ponendo $F = 60^\circ$ si trova

$$E = 40^\circ.\ 50' \quad ; \quad \Delta = 21^\circ.\ 40'$$

così l'angolo $\pi\ O\ S$ che il raggio emergente dal prisma nella direzione del quale si vedono i colori fa colla retta $S'\pi$, prolungata ovvero con OS che va dal punto O all'astro, deve essere di $21^\circ.\ 40'$.

Se immaginiamo che la retta $O\pi$ prolungata in alto descriva un cono intorno ad OS come asse, tutti i prismi situati sulla superficie di questo cono che avranno la posizione richiesta produranno per un occhio situato in O la visione di colori simili, e daranno in cielo l'apparenza di un alone colorato del diametro che l'osservazione ci mostra.

L'alone il cui raggio è circa di 45° è attribuito dal D.r Young alla circostanza che i raggi già rifratti da un primo prisma sono talvolta rifratti nello stesso modo anche da un secondo prisma e

così acquistano una deviazione di 43°. 20′. Cavendish attribuisce invece il fenomeno a ciò che fra i prismi triangolari equilateri ve ne sono sparsi dei rettangolari. Per questi prismi dalle formule (5), (6) si avrebbe

$$E = 67°. 40' \quad ; \quad \Delta = 45°. 20';$$

come coll' osservazione. L'esistenza di prismi di ghiaccio rettangolari non è ipotetica, ma è stata verificata col fatto. Forse il fenomeno è dovuto talvolta all' una, talvolta all' altra di queste due cause.

Nei grandi aloni la divergenza dei raggi rossi meno rifrangibili è minore, ed il rosso è interno, nei piccoli aloni dovuti alla difrazione, gli anelli sono più grandi quanto più le ondulazioni del color corrispondente sono lunghe (1), ed il rosso trovasi all'esterno.

Nei paesi del Nord appaiono talvolta oltre il grande alone di 45° di diametro vari archi luminosi che si tagliano in più punti, ed in varii di questi punti d'incontro appaiono come dalle altre immagini del sole. Questo fenomeno è stato indicato col nome di *Parelio*, se il corpo luminoso è il sole, o *paraselene*, se il corpo luminoso è la luna. Hevelio ha dato la più magnifica descrizione di un parelio che vide a Danzica il 20 Febbrajo 1661. La spiegazione completa di questo fenomeno non è ancor stata data. Vedasi il volume II delle opere postume di Huyghens.

(1) Lez. XXIX, formula (1).



NOTE

ACUSTICA

NOTE ALLA LEZIONE XX.

Nota I.

Sulla velocità di propagazione del suono nell'aria e nei fluidi elastici in generale.

1. La velocità di propagazione del suono è stata determinata teoricamente la prima volta dal gran Newton, e forma il soggetto delle proposizioni XLVII, e XLIX del secondo libro dei *Principii* ec. Questo passo dell'opera dei principii essendo stato considerato come uno dei più oscuri e difficili, Lagrange nelle Memorie dell'Accademia di Berlino dell'anno 1786 lo dilucidò e generalizzò. La generalità della dimostrazione di Lagrange lascia però ancora sussistere alcun che di vago sul modo con cui certe condizioni del movimento delle particelle della colonna aerea possono essere soddisfatte. Attenendomi in gran parte al metodo semplice di Newton farò quelle modificazioni che si richiedono per rendere le supposizioni adottate coerenti con ciò che realmente avviene in natura.

Newton considera una linea fisica d'aria o d'un mezzo elastico qualunque, ed immagina che tutti i punti fisici di questa linea vengano ad essere scossi successivamente l'uno dopo l'altro, ed eseguiscano dei movimenti simili, di modo che tutti facciano delle oscillazioni eguali. Secondo questo concetto, supponendo che, sulla linea aerea AD, fig. 138, C rappresenti il punto che comincia la sua vibrazione quando il punto B sta per finire la sua, il movimento passerà fra due altri punti qualunque della linea d'aria posti fra loro ad una distanza eguale a BC sempre in un tempo eguale, o sia il movimento andrà propagandosi colla velocità che risulta dividendo lo spazio BC pel tempo della oscillazione di un punto.

Figurandoci che tutte le molecole agitate da una velocità propria, che sarà sempre minima, costituiscano un'onda BC, e che le ordinate Eb, Ff ec. della curva $Bbf.C$ rappresentino le velocità delle

rispettive molecole E, F ec. possiamo immaginare che quest' onda trascorra rapidamente con moto uniforme la linea AD, e che la molecola situata in E, senza cangiare sensibilmente di luogo, prenda, durante il transito dell' onda, successivamente le velocità di tutte le molecole dell' onda medesima, con che compirà la sua brevissima vibrazione.

2. Onde applicare il calcolo a questa specie di moti conviene scostarci un poco dalla supposizione di Newton, che come vedremo in seguito è in parte inammissibile, ed assumere che la legge di movimento colla quale la molecola E eseguìsce la sua vibrazione sia quella con cui verrebbe a muoversi un punto m, fig. 138, che si trovasse costantemente nella projezione, sulla direttrice PS, di un' altro corpo M che descrivesse la cicloide PMS (1). La lunghezza della vibrazione della molecola E che passa da E in e (2), sarebbe in questo caso rappresentata dalla intera direttrice $PS = Ee$, o dalla circonferenza del cerchio generatore; il centro O di questo cerchio percorrerebbe tutta la lunghezza della vibrazione con moto uniforme, e potrebbe rappresentare il luogo medio della molecola E, ma questa molecola si muoverà di moto vario; nel primo quarto della vibrazione rimanendo addietro dal suo luogo medio o dal punto di projezione del centro del cerchio, anderà sempre più scostandosi da esso, dopo comincerà ad accostarvisi e lo raggiungerà a mezza vibrazione, in seguito lo precederà e lo avanzerà sempre più sino alla fine del terzo quarto, e per ultimo gli si avvicinerà di nuovo, e coinciderà con esso al compirsi della vibrazione. Avviene così che la superficie vibrante del corpo sonoro va colla sua escursione spingendo avanti di se progressivamente tutta la colonna aerea di uno spazio eguale a quello che essa percorre, e le molecole alla fine della loro vibrazione si trovano successivamente trasportate avanti della stessa quantità, ma il trasporto delle molecole non si fa con moto uniforme, ciascuna di esse oscilla intorno alla sua posizione media colla legge che abbiamo indicato.

Affinchè questa sorte di movimento sia conforme alla realtà, bisognerà che le condensazioni o dilatazioni, che nascono in conseguenza di esso lungo le varie parti della colonna aerea, siano appunto tali da poter reciprocamente generare delle forze o delle pressioni atte a far variare le velocità delle molecole nel modo supposto. Per procedere a questa verificazione cercheremo prima di esprimere le condensazioni o rarefazioni dei due elementi della colonna aerea che sono posti uno avanti l' altro indietro del punto E, quindi prendendo la differenza

(1) Vedasi la Nota III della Lezione IV.

(2) Siamo stati obbligati ad ingrandire straordinariamente l' estensione Ee, o PS della vibrazione di una molecola, comparativamente alla lunghezza BC dell' onda, da come sono realmente in natura, per dar distinzione alla figura. Le lunghezze delle vibrazioni sono minime e spesso impercettibili, quelle delle onde sono finite e varie volte grandi.

delle due pressioni proveniente dalla disuguaglianza di densità di questi due elementi calcoleremo la forza acceleratrice del punto E, e vedremo se questa forza acceleratrice è veramente tale da far oscillare la molecola E, intorno al suo luogo medio rappresentato dal centro mobile del cerchio generatore, colla legge assunta, ed in modo che essa compia la sua vibrazione giungendo con una velocità nulla ed una forza acceleratrice nulla nel punto estremo e.

Per tale oggetto consideriamo sulla linea AD tre punti $'E$, E, E' vicinissimi fra loro e situati a distanze reciproche eguali. Le oscillazioni di questi punti, essendo tutte simili, potranno tutte essere rappresentate dal movimento di m della fig. 138 *bis*; ma come il movimento del punto E' comincia prima di quello di E, e quello di $'E$ dopo di E, il corpo fittizio M non partirà da P nello stesso tempo per rappresentare colla sua projezione il movimento di questi tre punti, ma rispetto al punto E' partirà un tempo prima, e rispetto al punto $'E$ un tempo equidistante dopo di quello in cui è partito il punto E, e questi tempi staranno a quello di un' intera vibrazione, come $E'E$ od $'EE$ sta a BC. Sia quindi PQ quella parte dell' intera lunghezza PS della vibrazione, che è proporzionale al tempo decorso dall' istante in cui la molecola E si è mossa, elevando da Q sulla direttrice una perpendicolare, questa conterrà il centro O del cerchio generatore alla fine di questo tempo, e prendendo due altri punti Q' e $'Q$ uno precedente, e l' altro seguente il punto Q di due tratti eguali, e tali che sia

$$QQ' \text{ o } 'QQ : PS :: E'E \text{ od } E'E : BC,$$

ciò che dà

$$(1) \qquad QQ' = 'QQ = \frac{PS}{BC} E'E = \frac{PS}{BC} E'E,$$

i punti Q' e $'Q$ saranno pel medesimo istante i piedi delle perpendicolari alla direttrice sulle quali dovranno trovarsi rispettivamente i centri O' ed $'O$ dei circoli generatori, che servirebbero a rappresentare le vibrazioni dei punti fisici E' ed $'E$. Segando poi su questi circoli due archi $Q'M'$ e $'Q'M$ eguali a PQ' e $P'Q$, abbassando le due perpendicolari $M'm'$ ed $'M'm$, e trasportando le distanze Pm', Pm e $P'm$ da E' in ε', da E in ε e da $'E$ in $'\varepsilon$ in modo che sia

$$Pm' = E'\varepsilon' \quad ; \quad Pm = E\varepsilon \quad ; \quad P'm = 'E'\varepsilon;$$

i punti ε', ε, $'\varepsilon$ designeranno i luoghi dove si troveranno contemporaneamente i punti E', E ed $'E$ alla fine del tempo che si considera.

Le due porzioncelle $E'E$, $E'E$ della linea aerea trasportate in $\varepsilon'\varepsilon$, $\varepsilon'\varepsilon$ risulteranno pertanto compresse o dilatate, secondo che $\varepsilon'\varepsilon$, ed $\varepsilon'\varepsilon$ saranno divenute minori o maggiori di E'E od E'E, e nella stessa proporzione saranno aumentate o diminuite le densità dell' aria

di quelle porzioncelle, cioè a dire le loro densità saranno cresciute o diminuite rispettivamente nella ragione di $\frac{E'E}{\varepsilon'\varepsilon}$, ed $\frac{E\,'E}{\varepsilon\,'\varepsilon}$. Se ora per maggior generalità si assume che la forza espansiva od elastica dell'aria, o le pressioni che la misurano, siano come una certa potenza $1+\gamma$ della densità, chiamando gp la pressione dell'aria nello stato naturale in $E\,'E$ od $E\,'E$ al principio dell'oscillazione, e gp', $g\,'p$ quelle in $\varepsilon'\varepsilon$, ed $\varepsilon\,'\varepsilon$, g dinotando la gravità, si avrà

$$(2) \qquad gp' = gp\left(\frac{E'E}{\varepsilon'\varepsilon}\right)^{1+\gamma} \qquad g\,'p = gp\left(\frac{E\,'E}{\varepsilon\,'\varepsilon}\right)^{1+\gamma}.$$

Per dare a questi valori delle pressioni una forma che le rappresenti in modo da essere più facilmente interpretata, osserveremo che nella figura si ha

$$(3) \quad \begin{aligned} \varepsilon'\varepsilon &= E'E + E\varepsilon - E'\varepsilon' = E'E + Pm - Pm' = E'E - mm' \\ \varepsilon\,'\varepsilon &= E\,'E + {}'E\,'\varepsilon - E\varepsilon = E\,'E + P\,'m - Pm = E\,'E - {}'m\,m. \end{aligned}$$

Ora se si tracciano le rette $M'n'$ ed $'M\,'n$ parallele alla direttrice e terminate sulla circonferenza del cerchio QM, e si segnano con n', $'n$; l', $'l$ i punti d'intersezione di queste rette col detto circolo, e colla retta mM prolungata, si rileva facilmente che si ha

$$mm' = M'n' - n'l' \quad ; \quad {}'m\,m = {}'M\,'n - {}'l\,'n.$$

Dal centro O del cerchio QM conducansi ai punti o' ed $'o$ sulla metà degli archi Mn' ed $'nM$ i raggi Oo' ed $O\,'o$, e dai punti o' ed $'o$ le $o'\mu'$ ed $'o\,'\mu$ parallele alla direttrice e terminate sull'ordinate QO: considerando, per la piccolezza indefinita degli archi Mn' ed $'nM$, come rettilinei i triangoli $n'Ml'$, $'nM\,'l$, la similitudine di questi coi triangoli $Oo'\mu'$, $O\,'o\,'\mu$ ci darà

$$n'l' = QQ'\frac{\mu'O}{QO} \quad ; \quad {}'l\,'n = {}'QQ\frac{{}'\mu\, O}{QO}$$

osservando che si ha $n'M' = {}'M\,'n = QQ' = {}'QQ$.

Con questi valori di $n'l'$ ed $'l\,'n$ le espressioni precedenti mm' ed $'m\,m$ diverranno

$$(4) \quad mm' = QQ'\left(1 - \frac{\mu'O}{QO}\right) = QQ'\frac{Q\mu'}{QO} \; ; \; {}'m\,m = {}'QQ\left(1 - \frac{{}'\mu\, O}{QO}\right) = {}'QQ\frac{Q\,'\mu}{QO}$$

e quindi, giusta le formole (3), si avrà

$$(5) \quad \varepsilon'\varepsilon = E'E - QQ'\frac{Q\mu'}{QO} \quad ; \quad \varepsilon\,'\varepsilon = E\,'E - {}'QQ\frac{Q\mu'}{QO}.$$

3. Non sarà inopportuno, prima di progredire, il far notare che

$m\,m'$ dinota, relativamente alla vibrazione della stessa molecola E, il piccolo spazietto che essa descrive in un tempuscolo di brevità indefinita, proporzionale a QQ', che sarebbe dato da $\frac{t}{PS}\cdot QQ'$, t dinotando la durata della vibrazione. Se quindi si chiama u la velocità della molecola, il suo valore sarà, come è noto, espresso dal rapporto dello spazietto $m\,m'$ al detto tempuscolo, e perciò servendoci del valore di questo rapporto dato dalla formola (4) avremo

$$u = \frac{t}{PS}\cdot\frac{Q'\mu}{QO}. \qquad (6)$$

Da un altro lato se si pone

$$\varepsilon\varepsilon' = (1-\delta)\,EE'$$

δ rappresenterà secondo che è positivo o negativo la condensazione o dilatazione dell'elemento EE' nello stesso istante. Ora da quest'equazione dalla (5), e dalla (1) si ricava

$$\delta = \frac{EE'-\varepsilon\varepsilon'}{EE'} = \frac{PS}{BC}\cdot\frac{Q\mu'}{QO}.$$

Siccome le quantità t, PS, BC, QO sono costanti, e $Q\mu'$ è la sola variabile col tempo, questa formola e la (6) ci mostrano che tanto la velocità u, che la condensazione δ variano proporzionalmente a $Q\mu'$, o sia al seno verso dell'arco di cui ha rotato il cerchio generatore.

Il paragone delle due formole ci dà poi

$$u = \frac{BC}{t}\,\delta$$

cioè, la velocità e la condensazione sono ad ogni istante proporzionali fra loro, ed il rapporto di queste quantità è misurato dalla velocità di propagazione del suono che, come abbiamo premesso, è data da $\frac{BC}{t}$. Queste proprietà costituiscono in gran parte la natura dei movimenti vibratorii che consideriamo, e perciò meritavano d'essere notate.

4. Ritornando al nostro assunto, ricaviamo dalle formole (5) i valori dei rapporti $\varepsilon\varepsilon' : EE'$ e di $\varepsilon'\varepsilon : E'E$ per sostituirli nelle espressioni delle pressioni p' e $'p$: avremo primieramente impiegando in luogo dei rapporti $QQ' : EE'$, e $'QQ : E'E$ quelli dati dalle formole (1)

$$\frac{\varepsilon\varepsilon'}{EE'} = 1-\frac{PS}{BC}\,\frac{Q\mu'}{QO} \quad ; \quad \frac{\varepsilon'\varepsilon}{E'E} = 1-\frac{PS}{BC}\,\frac{Q\mu'}{QO}$$

quindi dalle formole (2) si avrà

$$g\,p' = g\,p\left(1 - \frac{P\,S}{B\,C}\cdot\frac{Q\,\mu'}{Q\,O}\right)^{-(1+\gamma)}\;;\quad g\,'p = g\,p\left(1 - \frac{P\,S}{B\,C}\,\frac{Q'\mu}{Q\,O}\right)^{-(1+\gamma)}\;;$$

e queste due pressioni potranno considerarsi come esistenti nei punti ω' ed $'\omega$ presi sulla metà di $\varepsilon\,\varepsilon'$ ed $\varepsilon\,'\varepsilon$, e corrispondenti ai punti o' ed $'o$.

Prendendo la differenza $g\,'p - g\,p'$ delle due pressioni, e supponendola moltiplicata per la superficie della sezione normale della colonna aerea che prenderemo per unità, avremo la forza motrice che opera sull'elemento $\omega'\,'\omega$. Ora indicando con D la densità naturale dell'aria, e con Δ la densità dell'elemento $\omega'\,'\omega$ nell'istante che si considera, avremo la massa del medesimo elemento espressa da $\Delta\,\omega'\,'\omega = D\,.\,E'\,'E$. Dividendo quindi la detta forza motrice per questa massa, si avrà la forza acceleratrice nel punto E data da

$$f = \frac{g\,p}{D\,.\,E'\,'E}\cdot\left\{\left(1 - \frac{P\,S}{B\,C}\cdot\frac{Q'\mu}{Q\,O}\right)^{-(1+\gamma)} - \left(1 - \frac{P\,S}{B\,C}\,\frac{Q\,\mu'}{Q\,O}\right)^{-(1+\gamma)}\right\}.$$

La lunghezza $P\,S$ della vibrazione di una molecola è estremamente piccola in confronto dello spazio $B\,C$ che percorre l'onda od il suono nello stesso tempo; potremo quindi sviluppare colla formola del binomio le due potenze, e fermarci al secondo termine trascurando il resto, risulterà così

$$f = -\,(1+\gamma)\,\frac{g\,p}{D\,.\,E'\,'E}\cdot\frac{P\,S}{B\,C}\,\frac{Q\,\mu' - Q'\mu}{Q\,O}.$$

Dal punto M mezzo di $'o\,o'$ conduciamo il raggio $M\,O$, e la retta $M\,\mu$ parallela alla direttrice sino ad incontrare in μ l'ordinata $Q\,O$ del centro del cerchio generatore, e tracciamo la retta $'o\,o$ parallela a questa ordinata e limitata dalle $'o'\mu$ ed $o'\mu'$. Sarà $Q\,\mu' - Q'\mu = {}'\mu\,u' = {}'o\,o$, e considerando al solito come rettilineo il latercolo $'o\,o$, per la sua indefinita piccolezza, la similitudine del triangolo $'o\,o\,o'$ al triangolo $M\,\mu\,O$ ci darà le eguaglianze

$$\frac{'o\,o}{'o\,o'} = \frac{Q\,\mu' - Q'\mu}{'o\,o'} = \frac{M\,\mu}{M\,O}.$$

Osservando poi che, giusta la costruzione e la formola (1), si ha

$$'o\,o' = Q\,Q' = \frac{P\,S}{B\,C}\,E'\,E\quad;\quad M\,O = Q\,O = \frac{1}{2\pi}\,P\,S;$$

al precedente valore di f potremo dare la forma

$$(6)\qquad f = -\,(1+\gamma)\,\frac{g\,p}{D}\cdot\frac{4\,\pi^2}{B\,C^2}\cdot M\,\mu.$$

Il coefficiente $-\,(1+\gamma)\,\frac{g\,p}{D}\,\frac{4\,\pi^2}{B\,C^2}$ essendo costante, la forza acceleratrice

f varierà soltanto proporzionalmente ad $M\mu = m\,Q$. Questa forza sarà nulla all'annullarsi di $M\,Q$, cioè al principio della vibrazione, nel mezzo ed alla fine.

Il punto m rappresenta sulla lunghezza della vibrazione il luogo ε in cui si trova la molecola E, ed il punto Q il luogo medio in cui si troverebbe questa molecola se si muovesse uniformemente colla velocità del cerchio generatore. La forza acceleratrice f che opera sulla molecola E, per causa delle condensazioni della colonna aerea, è dunque proporzionale alla distanza di questa molecola dal suo luogo medio e durante una vibrazione passa due volte per gli stessi valori. Secondo le proprietà dell'isocronismo esposte nelle Note II e III della Lezione IV, questa molecola farà quindi in virtù della forza eccitata, due oscillazioni isocrone simili alle cicloidali intorno al suo luogo medio (1) il che è appunto il movimento che abbiamo supposto. Le condizioni delle quali si è parlato nella prima parte di questo numero si trovano dunque verificate, e la supposizione, della quale siamo partiti, sul movimento della molecola E è legittima. La velocità assoluta di E coinciderà colla media ad un quarto ed a tre quarti della vibrazione, a metà della vibrazione ne sarà il doppio, ed al principio ed alla fine sarà nulla.

3. Secondo il teorema dato dalla formula (4) della citata Nota II, il tempo dell'oscillazione di un pendolo cicloidale è espresso da

$$T = \pi\,\frac{1}{\sqrt{K}}\,;$$

K dinotando il coefficiente costante pel quale moltiplicando la distanza del pendolo dal centro dell'oscillazione si ottiene l'espressione della forza. Il tempo della vibrazione della molecola E, o di due oscillazioni, sarà dunque

$$t = 2\pi\,\frac{1}{\sqrt{K}}\,;$$

con che si sostituisca per K il valore che corrisponde al nostro caso, cioè il coefficiente della formola (6), si avrà così

$$t = B\,C.\sqrt{\frac{D}{(1+\gamma)\,g\,p}}.$$

Il rapporto di $B\,C$ a t misura secondo ciò che abbiamo premesso la velocità con cui si propaga il suono; questa velocità sarà dunque data da

$$(7) \qquad v = \sqrt{\frac{(1+\gamma)\,g\,p}{D}}:$$

(1) La legge con cui varia il movimento di un pendolo cicloidale è, come si raccoglie dalla Nota citata, quella di un punto m che fosse, sopra un diametro d'un cerchio immobile, la projezione di un altro punto M che percorresse uniformemente la circonferenza.

cioè la velocità del suono sarà come la radice del quoziente della pressione atmosferica, divisa per la densità dell'aria, moltiplicato per l'esponente a cui si deve elevare la densità di una massa d'aria menomamente compressa per ottenere la pressione corrispondente quando non vi è perdita di calore. Vedasi la Nota II della Lezione XIX.

La quantità $\frac{p}{D}$ rappresenta l'altezza di una colonna d'aria, d'una densità uniforme D, atta a produrre la pressione barometrica p, da ciò si vede che la velocità del suono è quella che acquisterebbe un grave cadendo da una porzione $\frac{1+\gamma}{2}$ dell'altezza della colonna suddetta.

Se terminata la prima escursione, con una velocità nulla, la superficie vibrante retrocede per fare un'escursione simile per indietro, le velocità cambieranno di direzione, e le condensazioni della colonna aerea si convertiranno in dilatazioni. La cicloide sopra cui deve scorrere il corpo M per rappresentare colla sua projezione sulla direttrice il luogo della molecola E dovrà quindi essere rivolta per abbasso della direttrice PS, ed il movimento essere diretto da S verso P, ma il calcolo verrà a riuscire in tutto simile al precedente. Il fenomeno si ripeterà poi nello stesso modo ad ogni due escursioni, una per avanti, l'altra per indietro della superficie vibrante del corpo sonoro.

6. Newton invece di supporre che la vibrazione della molecola E fosse rappresentata dalla projezione di un punto M della circonferenza di un cerchio che rota sulla direttrice, suppose in vece il cerchio immobile, e rappresentò il movimento della molecola E per mezzo di quello di un pendolo cicloidale, e facendo constare la vibrazione di una andata e di un ritorno, trovò lo stesso valore (7) per la velocità di propagazione. La dimostrazione di Newton venne, come fu detto sopra, illustrata da Lagrange, che alla fine della dimostrazione soggiunse due osservazioni importanti. Una volta ammesso che le oscillazioni eccitate in una parte della linea aerea siano simili a quelle dei pendoli cicloidali, si trova così dimostrato che il movimento oscillatorio può conservarsi, e deve propagarsi lungo la linea aerea colla velocità data dalla premessa formola (7). Ma questo caso non può presentarsi che rarissime volte in natura, le prime molecole in contatto col corpo sonoro ricevono delle velocità che possono variare in differenti modi, ed il movimento non essendo in origine quale si è supposto, non si può tampoco conchiudere che si propaghi colla suddetta legge. D'altronde le oscillazioni delle particelle aeree essendo analoghe a quelle dei pendoli cicloidali, una volta eccitate nell'aria dovrebbero continuare lungamente sino a che gli ostacoli estranei le estinguessero a poco a poco, ciò che è contrario ai fenomeni; poichè il suono si estingue appena cessa il movimento del corpo sonoro. In conseguenza di ciò Lagrange riprende a dimostrare la stessa proposizione senza adottare nessuna legge particolare sul modo di vibrazione. Que-

ste obbiezioni sulle quali Lagrange aveva insistito sino dalla sua prima Memoria sul suono nelle Miscellanee di Torino, furono così da lui stesso rimosse anche sinteticamente come lo erano state prima analiticamente.

Nella dimostrazione che noi abbiamo dato, la seconda obbiezione di Lagrange è insussistente, perchè la molecola E giunge in e alla fino della sua vibrazione con nna velocità nulla ed una forza acceleratrice nulla, e perciò non vi è ragione che torni ad oscillare se non sopraggiunge una nuova vibrazione. Non è così nella supposizione di Newton secondo la quale la molecola giunge alla metà ed alla fine della vibrazione, quando la forza acceleratrice è massima, e non può a meno di cominciare un movimento contrario.

In quanto alla prima obbiezione essa è ora svanita stante un principio meccanico di Daniele Bernoulli, ed alcuni progressi dell'analisi matematica ai quali Fourier ha il primo aperto il cammino. Il principio che Daniele Bernoulli ha stabilito, e che ha chiamato della *coesistenza delle piccole oscillazioni*, consiste in ciò, che un corpo può subire nello stesso tempo un'infinità di vibrazioni tutte semplici e isocrone regolari, senza che queste vibrazioni giammai si confondano o si turbino (1). Fourier ha provato in seguito che per mezzo di una somma illimitata di movimenti oscillatorii semplici, della specie di quelli che Newton ha supposto e le cui ampiezze siano dei submultipli successivi di quella del primo, si può sempre comporre un movimento oscillatorio dato qualunque, espresso da una funzione continua o discontinua. Come la velocità del suono che risulta della teoria esposta è indipendente dalla grandezza delle oscillazioni delle molecole intorno al loro luogo medio, e vale di qualunque ampiezza esse siano, le oscillazioni semplici submultiple, nei quali può essere decomposto il movimento oscillatorio che il corpo vibrante comunica alla prima particella aerea, si propagheranno tutte colla stessa velocità rimanendo congiunte, e perciò anche il movimento risultante totale impresso dal corpo andrà propagandosi colla velocità determinata sopra.

Nota II.

Formole per la velocità del suono nei corpi solidi o liquidi.

1. Il discorso che abbiamo fatto nella Nota precedente per determinare la velocità di propagazione del suono nell'aria, e nei fluidi aeriformi è con minime differenze anche applicabile a quella nei diversi corpi solidi o liquidi.

(1) Mémoires de l'Accadémie de Berlin pour l'année 1753, pag. 173.

Per mettere in evidenza questa analogia, premetteremo che le esperienze ci mostrano che i corpi solidi e liquidi, allorchè sono un poco compressi, ed i solidi anche quando sono alcun poco allungati in una direzione, oppongono una forza elastica che cresce proporzionalmente all'alterazione prodotta nella dimensione, secondo la quale la compressione o dilatazione è operata, valutando quest'alterazione in parti della dimensione totale. Così se si suppone che la forza comprimente o trattiva sia applicata ad un prisma, o cilindro di materia solida di una lunghezza l, la cui sezione perpendicolare all'asse abbia un'area eguale all'unità superficiale, e si dinota con δl l'accrescimento o l'allungamento del prisma per una forza P, il rapporto $\frac{P}{\delta}$ sarà, pel principio esposto, una quantità costante. Questo rapporto ha preso il nome di *modulo d'elasticità*, e perciò, chiamando q questo modulo, si ha

$$q = \frac{P}{\delta}.$$

Valutando il peso P con quello di un prisma della stessa materia la cui lunghezza sia L, si avrà

$$P = g \,.\, D \,.\, L\,;$$

D dinotando la densità della materia; per tal modo si otterrà

$$q = g\,\frac{D\,.\,L}{\delta}.$$

Si può col pensiero fingere che la proporzionalità fra la forza di pressione o di trattura e la compressione o distensione, che sussiste soltanto per le compressioni o distensioni minime, si verifichi sino a che il prisma stirato sia divenuto di lunghezza doppia, nel qual caso $\delta = 1$. Allora L sarà la lunghezza di un prisma della stessa materia il cui peso sia atto a duplicare la lunghezza del prisma stirato, calcolato nell'ipotesi della continuazione della proporzionalità della trattura alla distensione. Intendendo che L abbia questa significazione, il modulo d'elasticità sarà semplicemente espresso da

$$(1) \qquad q = g\; D \,.\, L.$$

Con questo valore di q si potrà avere la distensione o compressione d corrispondente ad una trazione o pressione p, o viceversa, colla proporzione

$$1 : q :: d : p$$

la quale dà

$$(2) \qquad p = q\,d.$$

2. Posti questi preliminari sul modo con cui si valuta il modulo

d'elasticità, e si calcola con esso la relazione fra le forze comprimenti e stiranti, e le compressioni e distensioni prodotte, si rileverà facilmente che per trasportare alla propagazione dei movimenti vibratorii nei corpi solidi o liquidi, la dimostrazione che abbiamo dato pei corpi aeriformi, l'unica modificazione da farsi è nell'espressione della forza elastica, poichè la formola di Mariotte non sussiste più in questo caso ma sibbene la formola (2). Così immaginando che la linea $A\,D$ della fig. 138, rappresenti ora una verga solida, dopo aver adottate le stesse supposizioni di prima, e ripetuti gli stessi ragionamenti sino a costruire i punti ε', ε, $'\varepsilon$, per progredire nel caso attuale si osserverà, che le due porzioncelle $E'\,E$, $E'E$ della verga, trasportate in $\varepsilon'\,\varepsilon$, $\varepsilon\,'\varepsilon$ avranno sofferto rispettivamente delle compressioni o dilatazioni d' e $'d$, che espresse in parti delle loro lunghezze primitive saranno date da

$$d' = \frac{E\,E' - \varepsilon\,\varepsilon'}{E\,E'} \quad ; \quad 'd = \frac{E\,'E - \varepsilon\,'\varepsilon}{E\,'E},$$

quindi tenderanno a dilatarsi o restringersi, secondo che d' e d' saranno positivi o negativi, colle forze p' e $'p$ che secondo la formola (2) potranno esprimersi con

$$p' = q\left(\frac{E'\,E - \varepsilon'\varepsilon}{E'\,E}\right) \quad ; \quad 'p = q\left(\frac{E\,'E - \varepsilon\,'\varepsilon}{E\,'E}\right);$$

o vero introducendo per $\varepsilon'\,\varepsilon$, $\varepsilon\,'\varepsilon$ le espressioni date dalle formule (3) della Nota precedente

$$p' = -\,q\,\frac{m\,m'}{E'\,E} \qquad 'p = -\,q\,\frac{'m\,m}{E\,'E}\,.$$

La differenza $p' - 'p$ di queste due forze sarà quella che opera sul prismetto $\omega'\,'\omega$, nella direzione $B\,C$, come forza motrice; dividendola per la massa $D\,\omega'\,'\omega = D\,.\,E'\,E$ dello stesso prismetto, e facendo le stesse riduzioni che nel n.° 4 della Nota suddetta, si avrà la forza acceleratrice del punto ε data da

$$f = -\,g\,L\,.\,\frac{4\,\pi^2}{B\,C^2}\,M\,\mu$$

in cui abbiamo posto per q il suo valore segnato (1).

Quest'espressione è in tutto analoga a quella segnata (6) nella Nota precedente, il coefficiente $g\,L$ tenendo luogo di $\frac{g\,(1+\gamma)\,p}{D}$, proseguendo quindi lo stesso ragionamento che è stato fatto in quella Nota, e che è egualmente applicabile al caso presente, si conchiuderà che la velocità di propagazione è espressa dalla formola

$$(3) \qquad v = \sqrt{g\,L}\,;$$

cioè questa velocità è quella che acquisterebbe un grave cadendo per la metà dell'altezza del prisma che rappresenta il modulo d'elasticità.

Questa formola, egualmente applicabile ai corpi solidi che al liquidi, è stata introdotta nella Scienza dal D.r Young e da Laplace.

3. Onde mostrare l'uso di essa, supponiamo di dover calcolare la propagazione della velocità del suono nel ferro. Secondo Dulau il peso che si esige per allungare od accorciare di 0,0001 della sua lunghezza un filo di ferro, avente per sezione un millimetro quadrato, è di 2 chilogrammi. L'altezza di una colonna d'acqua avente per base un millimetro quadrato e che pesasse 2 chilogrammi essendo di 2000 metri, quella di una colonna dello stesso diametro e dello stesso peso, ma fatta di ferro, la cui gravità specifica è 7,8 volte maggiore, sarà soltanto di $\frac{2000^{m}}{7,8} = 256^{m},41$. Questa colonna compete ad un allungamento di 0,0001 della lunghezza, e perciò quella che competerebbe all'intera lunghezza, e che misurerebbe il modulo d'elasticità sarebbe $2564100 = L$. Sostituendo nella formola (3) per L questo valore, e per g il valore $9^{m},80594$ (Vedi la Nota II della Lez. XVII), si trova

$$v = 5014^{m}.$$

Questa velocità è 15,07 volte maggioro di quella dell'aria, il che concorda assai bene col risultato delle esperienze di Savart riferite all'art. 10 a cui questa Nota è annessa,

4. La velocità di propagazione del suono nell'acqua deducesi con un calcolo analogo. L'acqua del lago di Ginevra, secondo il Sig. Colladon, si costipa di 0,0000495 sotto la pressione atmosferica, cioè sotto la pressione di una colonna di mercurio alta $0^{m},76$, e perciò di una di acqua alta $0^{m},76 \times 13,5892 = 10^{m},335$, poichè il mercurio pesa 13,5892 volte più dell'acqua. Quest'altezza corrispondendo ad una compressione di 0,0000495, quella corrispondente al modulo d'elasticità sarà $\frac{1}{0,0000495}$, o sia 20202 volte maggiore, per cui si avrà $L = 20202 \times 10^{m},335 = 208783^{m}$. Con questo valore di L, e quello di g sopra indicato, risulta dalla formula (3)

$$v = 1430,^{m}9$$

poco differente dalla velocità citata nel testo, trovata per esperienza che è di 1435^{m} per secondo di tempo.

NOTA III.

Sull' indebolimento dell' intensità del suono al crescere della distanza dal corpo sonoro.

Si può provare che l' intensità del suono diminuisce come il quadrato della distanza dal luogo dove è stato eccitato, tutte le volte che si propaga sfericamente, facendo uso del principio delle forze vive.

La propagazione del suono o di uno scuotimento prodotto in un punto di un mezzo di densità uniforme si fa in modo che questo scuotimento va propagandosi sfericamente tutto all' intorno, agitando ad ogni istante le molecole che si trovano sopra la stessa superficie sferica, passando successivamente da una superficie sferica all' altra colla velocità del suono, e lasciando ritornare in riposo le molecole delle superficie sferiche che restano addietro. I tremiti vanno così diventando minori a misura che si comunicano ad un maggior numero di molecole, o a delle superficie sferiche di maggior estensione, e se si chiama v la velocità di questi tremiti in una data superficie sferica in cui la somma delle masse delle molecole che la compongono sia m, la forza viva di questa superficie sarà espressa da mv^2. Ora questa forza viva nel trasmettersi dovendo, pel principio su citato, rimanere una quantità costante in ogni superficie sferica, si avrà

$$mv^2 = c;$$

c essendo una costante.

Le masse delle superficie sferiche di grossezze minime ed eguali che saranno successivamente scosse a misura che il suono si propaga nel mezzo di intensità uniforme, crescendo come l' estensione delle stesse superficie o come i quadrati dei raggi, se si chiama x la distanza di una di questa superficie dal centro dello scuotimento, si avrà

$$m = kx^2;$$

k essendo un coefficiente costante, o per dir meglio la massa della superficie sferica di raggio uno. Si avrà quindi sostituendo questo valore di m

$$kx^2 . v^2 = c,$$

o sia

$$v = \sqrt{\frac{c}{k}} \cdot \frac{1}{x}.$$

$\sqrt{\frac{c}{k}}$ essendo una quantità costante, la velocità v varierà da una su-

perficie sferica all' altra nella ragione inversa del raggio, o della distanza x.

L' impulsione che riceverà l' orecchio o l' intensità del suono sarà proporzionale alla forza viva delle molecole che lo percuotono; il numero di queste molecole essendo costante, e proporzionale all' estensione del timpano o dell' organo senziente dell' udito, la forza viva dell' impulsione varierà soltanto proporzionalmente al quadrato della loro velocità, e l' intensità I^2 del suono sarà espressa da

$$I^2 = \gamma v^2 = \gamma \cdot \frac{c}{k} \cdot \frac{1}{x^2} :$$

γ essendo il coefficiente costante della proporzione. Questa formula ci mostra che l' intensità I^2 decresce come il quadrato della distanza x.

NOTE ALLA LEZIONE XXI.

Nota I.

Determinazione, per mezzo della formola di Taylor, del numero di vibrazioni fatta da una corda in un secondo.

La formola di Taylor pel tempo della durata di nna vibrazione di una corda, che abbiamo riferito all' art. 6, dà

$$t = \sqrt{\frac{pl}{gf}}.$$

Il dottor Smith caricò con un peso di 7 libbre inglesi (3^k,1745) un filo d'ottone sospeso da uno spillo, e lo accorciò fino a tanto che dava una voce unisona colla doppia ottava bassa della corda vota, che dà il *do*, del violino. In questo stato il filo aveva la lunghezza di $35 . \frac{55}{100}$ pollici ($0,^m9030$), e pesava 31 grani ($2^g,007$). Ora con questi dati la formola precedente somministra pel tempo di nna vibrazione

$$t = \sqrt{\frac{2,007 \times 0,9030}{9,806 \times 3174,5}}.$$

Dividendo il secondo di tempo per questo valore di t, si avrà il numero delle vibrazioni che la corda faceva in nn secondo dato da

$$n = \frac{1''}{t} = \sqrt{\frac{9,806 \times 3174,5}{2,007 \times 0,9030}} = 131.$$

Così il *do* della prima ottava deve fare giusta questo esperimento 131 vibrazioni per secondo di tempo.

Nota II.

Determinazione del numero delle vibrazioni fatte da una lamina elastica in un secondo di tempo.

Chladny propose (1), ciò che pare aver anche posto in esecuzione, di prendere una lamina d'ottone bene omogenea della grossezza di mezza linea e della lunghezza di mezzo pollice, di fissarla con nna estremità

(1) Traité d'Acoustique §. 5.

in una tanaglia ben ferma, e proporzionare la lunghezza della parte che sporge dalla tanaglia in modo che faccia quattro vibrazioni per secondo. Queste vibrazioni riescono assai lente per essere percepite coll' occhio, e poter essere contate durante alcuni minuti. Allora misurasi con precisione la lunghezza della parte che vibrava, e schiudendo la lamina introducasi più addentro nella tanaglia, diminuendo la lunghezza della parte sporgente sino a tanto che fatta vibrare di nuovo con un arco di violino, dia un suono unisono con quello del *diapason* o corista. Misurasi di nuovo la lunghezza della parte sporgente, e come per un teorema di Daniele Bernoulli, i numeri delle vibrazioni delle lamine d'egual forma, e grossezza e materia, sono inversamente come i quadrati delle lungbezze (1) si dedurrà con questa proporzione, che la nota *do* della prima ottava fa circa 127 vibrazioni per secondo.

(1) Vedasi la Nota I della Lezione XXII, formola (1).

NOTE ALLA LEZIONE XXII.

Nota I.

Formole pel calcolo delle vibrazioni trasversali, longitudinali e revolutive delle verghe elastiche.

Per comodo di quelli che avessero a fare degli esperimenti intorno al numero delle vibrazioni delle verghe o corde elastiche, riferiremo in questa Nota le formole che per tale oggetto il Sig. Poisson ha ritrovato originariamente, o confermato di nuovo, come sono esposte nel secondo volume del suo *Traité de Mécanique.*

Vibrazioni trasversali.

1. Il numero n delle vibrazioni trasversali che fa una verga elastica cilindrica o prismatica nell' unità di tempo (1), è data da

$$(1) \qquad n = \frac{b}{\pi l^2} \lambda^2.$$

In questa formola π dinota al solito il rapporto della circonferenza al diametro, l la lunghezza della verga, λ una quantità da determinarsi nel modo che vedremo in seguito, e si ha

$$b = a h \quad , \quad a = \sqrt{\frac{g l q s}{p}} = \sqrt{\frac{g q}{D}}:$$

dove g dinota la gravità, la quale, quando si prenda per unità di tempo il secondo, è espressa, sotto il parallelo di 45°, da $g = 9^m,8059$; q il modulo d'elasticità, p il peso della verga, D il peso specifico della sua materia (2), ed h una quantità dipendente della forma e situazione della seziono normale, s, della verga.

(1) Per conformarci all'uso degli scrittori d'Acustica che contano per una vibrazione l'andata, e per un'altra vibrazione il ritorno della verga o corda al luogo di partenza, abbiamo raddoppiato il valore di n dato da Poisson, il quale comprende in un'intera vibrazione l'andata ed il ritorno.

(2) Si può osservare che so si misura, come è stato detto nella Nota II della Lezione XX, la forza q col peso di una colonna della stessa base e materia della verga, si avrà $q = g L D$, L essendo l'altezza di questa colonna; e perciò sarà $a = \sqrt{g L}$, o sia il valore di a sarà la velocità corrispondente ad un grave che cadesse dall'altezza $\frac{1}{2} L$. Questa velocità, come si osservò nella citata Nota esprime rispettivamente la velocità di propagazione del suono in tutti i corpi elastici.

Se questa sezione è nn rettangolo, di cui la base sia normale al piano nel qnale la verga oscilla, e di cui l'altezza sia 2ε, si ha

$$h = \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} .$$

Se la verga è cilindrica, e la sezione un circolo il cui raggio sia rappresentato da ε, sia ha

$$h = \frac{1}{2}\,\varepsilon.$$

Se la sezione normale è un triangolo isoscele, colla sua base perpendicolare al piano in cui la verga oscilla, conviene distinguere due casi. Quando la verga è piegata in modo che forma colla faccia corrispondente alla base del triangolo una superficie cilindrica convessa si ha

$$h = \varepsilon\,\frac{\sqrt{2}}{3}$$

quando una superficie concava

$$h = \varepsilon\,\sqrt{\frac{2}{3}}$$

ε dinotando in amendue le formole l'altezza del triangolo isoscele.

Il nnmero λ è nno dei valori di $m\,l$ che risolvono l'equazione

$$(e^{ml} + e^{-ml}) \cos m\,l \mp 2 = 0$$

il segno snperiore ha luogo quando la verga è libera in amendue le estremità, e l' inferiore quando è fissa in nna estremità.

Il valore più piccolo di λ, quello che corrisponde al tuono più grave che può dare la verga è nel primo caso

$$\lambda = \frac{3}{2}\,\pi + 0{,}01765 = 4{,}74503$$

e nel secondo caso

$$\lambda = \frac{1}{2}\,\pi + 0{,}30431 = 1{,}87011.$$

Pei valori di λ corrispondenti ai tuoni più acuti, quando la verga forma dei nodi, si potranno prendere con sufficiente approssimazione; nel primo caso i nnmeri

$$\frac{5}{2}\,\pi,\ \frac{7}{2}\,\pi,\ \frac{9}{2}\,\pi \text{ ec.}$$

e nel secondo caso i numeri

$$\frac{3}{2}\,\pi,\ \frac{5}{2}\,\pi,\ \frac{7}{2}\,\pi \text{ ec.}$$

Se si paragona il suono più grave dato da una verga libera nelle due estremità, con quello più grave che essa dà quando è fissa in una sola estremità, si avrà secondo la formola (1), distinguendo con un apice i valori di n e λ nel secondo caso

$$\frac{n'}{n} = \frac{\lambda'^2}{\lambda^2} = \frac{(1,87011)^2}{(4,71503)^2} = 0,15715$$

così la verga libera darà circa la quinta della terza ottava alta del suono che dà quand'essa è fissa.

Vibrazioni longitudinali.

2. Si possono eccitare nelle verghe elastiche anche delle vibrazioni longitudinali fregandole per esempio nel verso della loro lunghezza con un panno o una pelle sparsa di polvere di colofonia. In questo caso le sezioni normali della verga prendono un moto alternativo verso le due estremità, ma con velocità diverse nelle diverse sezioni. La verga può anche dividersi in parti animate da moti contrarii, separate le une dalle altre da nodi immobili di vibrazione.

Il numero n, delle vibrazioni longitudinali corrispondento al tuono più grave dato da una verga libera nelle due estremità, durante un secondo di tempo, è espresso da

$$(3) \qquad n_{,} = \frac{a}{l} = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{q}{D}}$$

le lettere a, l, q, D avendo le stesse significazioni di prima.

Questa formola sussiste pure quando la verga è fissa in amendue le estremità, così che la verga in questi due casi è all'unisono.

Se la verga è fissa in una sola estremità, si ha

$$(4) \qquad n_{,} = \frac{a}{2l} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{q}{D}}$$

il numero $n_{,}$ delle vibrazioni non sarà dunque che la metà di quello dei due casi precedenti, e la verga darà in questo caso il suono dell'ottava più bassa.

Quando la verga si dividesse in parti, e formasse dei nodi rendendo così dei suoni più acuti, si moltiplicherà il precedente valore di $n_{,}$ per $2\nu + 1$, ν dinotando il numero dei nodi.

Queste formole spettanti alle vibrazioni longitudinali sono in tutto analoghe a quelle che rappresentano le vibrazioni delle colonne d'aria racchiuse nei cannelli come sono state analizzate da Daniele Bernoulli, ed esposte agli articoli 1, 2, 3 di questa Lezione, ponendo in luogo di a, che in quella rappresenterebbe la velocità di trasmissione del suono nell'aria, quella che corrisponde alla materia della verga.

Confronto delle vibrazioni longitudinali e trasversali delle verghe.

3. Volendo paragonare fra loro i suoni dati dalle vibrazioni trasversali e longitudinali di una stessa verga libera nelle due estremità, osservo che la formola (1) col primo valore di λ, ci dà

$$n = \frac{b}{n\, l^2}\,(4{,}74503)^2 = 7{,}12164 \,.\, \frac{b}{l^2}$$

e siccome $b = a h$, eliminando a fra questa e l' equazione (3) si avrà

$$\frac{n}{n_1} = (7{,}12164)\,\frac{h}{l}\,.$$

Questa formola è indipendente dalla materia della verga, e perciò il suono trasversale ed il suono longitudinale conserveranno uno stesso rapporto in tutte le verghe della stessa figura di qualunque sostanza siano fatte.

Il valore di h contiene, come abbiamo visto sopra, per fattore la grossezza ε della verga, la quale è in generale una quantità assai piccola in confronto della lunghezza l; così $\frac{h}{l}$ sarà una piccolissima frazione ed n dovrà essere assai piccolo in confronto di n_1, cioè nelle verghe il suono trasversale sarà assai più grave del suono longitudinale.

Se la verga è cilindrica o parallelepipeda si ha rispettivamente, come si è detto avanti

$$h = \frac{1}{2}\,\varepsilon \quad ; \quad h = \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$$

sostituendo questi valori, avremo in questi due casi

$$\frac{n}{n_1} = 3{,}56082\,\frac{\varepsilon}{l} \quad , \quad \frac{n}{n_1} = 4{,}11168\,\frac{\varepsilon}{l}\,.$$

Confronto delle vibrazioni longitudinali e trasversali delle corde.

Le vibrazioni longitudinali delle corde tese possono eccitarsi nello stesso modo di quelle delle verghe. Il numero di vibrazioni che queste corde possono dare nell' unità di tempo, è espresso da

$$n' = \sqrt{\frac{g\,q}{p\,l}}\,;$$

dove si sono conservate le stesse denominazioni precedenti.

Il numero delle vibrazioni trasversali, è, come deducesi dalla formola riferita all' articolo 6 della Lezione XXI, dato da

$$n = \sqrt{\frac{g f}{p l}}.$$

Il rapporto dei due valori di n darà

$$\frac{n'}{n} = \sqrt{\frac{q}{f}}.$$

Se si chiama δ l'allungamento della corda, espresso in parti della lunghezza totale della medesima, che sarebbe prodotto da una trazione eguale ad f, si avrà, secondo l'esposto al n.° 1 della Nota II della Lezione XX, $\frac{q}{f} = \frac{1}{\delta}$, e quindi sarà

$$\frac{n'}{n} = \sqrt{\frac{1}{\delta}}.$$

Il valore di δ essendo comunemente una piccola frazione della lunghezza totale della corda, il rapporto dei due valori di n sarà espresso da un numero grande, e le vibrazioni longitudinali, fatte nello stesso tempo, saranno molto più numerose delle trasversali.

Vibrazioni revolutive.

Le verghe rigide ed elastiche si possono anche far vibrare fregandole circolarmente con un archetto di violino, e toccandole nei punti che si vuole che restino fermi, e formino dei nodi. Lo sfregamento dell'archetto determina una torsione della verga per cui nascono lungo essa dei movimenti sincroni in un piano perpendicolare all' asse della verga. Queste vibrazioni che furono dapprima studiate da Chladny si chiamano revolutive. Se non vi è nessun nodo, tutte le parti della verga girano nella medesima direzione sebbene con velocità differente secondo la loro posizione: se vi sono nodi che separano la lunghezza della verga in parti aliquote, le une girano in un verso, le successive nel verso opposto, i nodi restano fissi. Le leggi di queste vibrazioni operate in una verga libera o fissa per una delle estremità o per amendue, sono le stesse di quelle delle vibrazioni longitudinali, ed in conseguenza la serie dei suoni è la medesima: ma il loro valore assoluto è differente. Chladny ha trovato che nella stessa verga e col medesimo numero di nodi le vibrazioni revolutive rendono la quinta grave del suono che producono le vibrazioni longitudinali, così che il rapporto del numero delle vibrazioni longitudinali e quello delle revolutive è espresso da $\frac{3}{2} = 1{,}500$. Il Sig. Poisson teoricamente ha trovato per questo rapporto $\frac{1}{2}\sqrt{10} = 1{,}581$. Il Sig. Savart con altre esperien-

ze ha ottenuto per lo stesso rapporto un numero ancor maggiore 1,6668. Il valore teorico del Sig. Poisson è circa il medio fra i due valori sperimentali.

Nota II.

Composizione delle vibrazioni di una corda intera e di quelle delle sue parti aliquote.

Per formarci un'idea distinta del modo con cui le parti di una corda vibrano nel tempo stesso che vibra l'intiera corda, giova di gettare gli occhi sulla figura (139).

La corda AB sia posta in movimento di tal modo che quando sia nella sua situazione rettilinea, trovisi animata da tre sistemi di velocità; uno totale, capace di trasportare l'intera corda AB in $AfDgB$, nel tempo competente alla durata della sua vibrazione (1); gli altri due parziali, capaci, il primo di trasportare la metà AC in AeC, ed il secondo la metà CB in CcB, nel tempo in cui queste due metà possono vibrare, cioè nella metà del tempo in cui vibra l'intera corda. Questa corda obbedendo contemporaneamente a tutti e tre i sistemi di velocità prenderà dopo un quarto della vibrazione totale la forma della curva $AmD'nB$, poi alla metà della vibrazione la forma della curva $AfDgB$, come se le vibrazioni parziali delle due metà non avessero esistito, indi ritornando indietro assumerà la forma della curva $Am'D'n'B$, ed alla fine della vibrazione tornerà rettilinea in AB. In questo stato della corda le velocità appartenenti ai due sistemi parziali saranno tornate eguali come in principio, poichè le due metà della corda avranno eseguito due vibrazioni, cioè un'andata e ritorno, ma le velocità appartenenti al sistema totale, saranno bensì eguali in tutti i punti della corda a quelle in principio, ma saranno dirette in verso contrario. La corda farà quindi un'altra vibrazione verso la parte superiore ed i suoi successivi stati ad un quarto, a mezza, a tre quarti di vibrazione saranno rispettivamente rappresentati dalle curve $ApE'qB$, $AhEkB$, $Ap'E'q'B$; poi alla fine della seconda vibrazione tornerà rettilinea in AB, per ricominciare due altre vibrazioni eguali alle prime, prescindendo dall'alterazioni che possono produrre la resistenza dell'aria e l'imperfezione dell'elasticità, che finiscono coll'annullare il movimento dopo molte vibrazioni.

Le curve che devono rappresentare la figura della corda nei diversi stadi della sua vibrazione si costrniscono facilmente per mezzo del principio della sovrapposizione dei piccoli movimenti. Come i movimenti vibratorii delle corde sono minimi ed appena percettibili, avendoli

(1) Vedasi la formola dell'art. 6 della Lezione XXI.

noi ingranditi nella figura col solo oggetto di renderli distinti, per avere il luogo di un punto a della corda in un dato istante, bisogna, assunto AB come asse, prendere le coordinate ac, ed $ae = cm$, corrispondenti ai luoghi nei quali il punto a dovrebbe trovarsi se eseguisse soltanto la vibrazione totale, o la vibrazione parziale, ed il luogo vero del punto a sarà dato, pel principio citato, dall'ordinata $am = ac - cm$ poichè i movimenti per ac ed ae, o cm sono diretti in versi opposti: pel punto b si avrebbe invece l'ordinata $bn = bd + bc = bd + dn$ perchè i due movimenti sono nello stesso verso. In questo modo si potranno costruire tutti i punti della curva fatta dalla corda quando i movimenti componenti sono dati.

L'applicazione di questi principii ai casi in cui le parti vibranti della corda fossero in numero maggiore, o diversamente combinate fra loro, è ovvia, senza che faccia bisogno di arrestarci su di essa.

NOTE ALLA LEZIONE XXIII.

Nota I.

Dell' ombra e della penombra.

1. Per intendere questa proposizione nei limiti in cui deve essere interpretata conviene che facciamo la distinzione di ciò che si chiama semplicemente *ombra*, da ciò che dicesi *penombra.*

Se havvi un punto luminoso *L* fig. 140 dal quale emanino dei raggi di luce in tutte le direzioni, ogni volta che sul loro cammino si troverà un corpo opaco, questo intercetterà tutti i raggi che lo incontrano, e lo spazio al di dietro del medesimo rimarrà privo di luce, prescindendo da alcune apparenze di diffrazione delle quali è parlato nella Lezione XXVIII. Così se dal punto luminoso *L* si conducano al corpo tante rette tangenti alla sua superficie lo spazio al di là del corpo compreso da queste tangenti rimarrà nell' oscurità; o bene se vi è una camera oscura, in una parete della quale sia praticato un foro dirimpetto al punto luminoso, conducendo dal punto tante rette tangenti al contorno del foro, lo spazio compreso nella camera oscura da tutte queste tangenti sarà illuminato. Quando il punto luminoso sia ad una distanza presso che infinita rispettivamente alla grandezza del foro, come può supporsi quella del sole, le tangenti suddette saranno sensibilmente parallele fra loro, lo spazio illuminato avrà una forma prismatica, o cilindrica, e presentando un piano perpendicolare alla direzione dei raggi, questi dipingeranno su di esso uno spazio illuminato della figura e della grandezza del foro.

2. In luogo di un solo punto fisico radiante sianvi più punti formanti assieme la superficie di un corpo luminoso, e supponiamo invece il foro ridotto ad un punto. Ciascun punto del corpo luminoso invierà nella camera oscura un raggio nella direzione della retta che lo unisce col foro, ed è facile di concepire che se si ricevono tutti questi raggi su di un piano perpendicolare alla retta che va dal foro al centro della superficie luminosa, si avrà sul piano un' immagine lucente simile a quella della stessa superficie, ma invertita di posizione, che crescerà di grandezza in proporzione che il piano si scosterà dal foro.

3. Proviene da un effetto in parte somigliante che, quando l' oggetto luminoso è assai lontano, ed il foro senza essere un punto è non ostante molto piccolo comparativamente alla distanza in cui sta il piano che riceve l' immagine, quest' immagine presenta sempre la figura del corpo luminoso qualunque sia la figura del foro. Se il corpo luminoso è rotondo, come il sole, l' immagine ricevuta sul piano è sempre rotonda,

ancorchè il foro sia, per esempio, triangolare; se la figura dell'immagine è falcata, come quella del sole quando è in parte eclissato, anche l'immagine sul piano è falcata. Infatti se il foro fosse un sol punto, l'immagine sarebbe simile, come abbiamo detto precedentemente, alla figura del corpo luminoso, e tanto più grande quanto più il piano che lo riceve è discosto dal foro. Se il foro non è un punto ed il corpo luminoso assai lontano, ciascun punto di questo corpo proietta nell'interno della camera oscura, come di sopra si è osservato, una piccola immagine lucida della stessa grandezza e forma del foro. Ogni punto dell'immagine del corpo luminoso, fatta nel primo caso, diventa così in questo secondo caso come il centro di una piccola immaginetta del foro, e dalla sovrapposizione di tutte queste immaginette nasce l'immagine totale. Ora è facile di concepire, fig. 141, che se in ogni punto dell'immagine primitiva si costruisce un'immaginetta del foro, un piccolo triangolo per esempio, la figura risultante sarà tuttavia sensibilmente simile alla primitiva.

Tutti i corpi esterni bene illuminati sono per la ragione esposta atti a dipingere, attraverso un piccolo foro di una camera oscura, delle immagini simili alla loro figura ma invertita, e si ottiene così un apparecchio di un effetto simile a quello della camera ottica, di cui si parla nella Lezione XXXIX, ma non tanto perfetto, perchè in queste le immagini non sono egualmente bene definite.

4. Ritorniamo alle considerazioni precedenti, e passiamo al caso più composto in cui tanto il corpo luminoso quanto il foro della camera oscura non siano più un sol punto. Nella figura 142 rappresentino '*F F'* ed '*L L'* i profili delle sezioni del foro e della superficie luminosa, assunta come piana, e supponiamo, per maggior semplicità, che essi siano perpendicolari alla retta che unisce i loro punti di mezzo *F* ed *L*. È facile di concepire che presentando nella camera oscura un piano *P P P* ad una distanza *F P* minore di quella *F G*, alla quale vanno ad incontrarsi i raggi che dagli estremi '*L L'* della superficie luminosa radono i rispettivi lembi '*F, F'* del foro, tutti i punti compresi nello spazio 'λ λ', limitato sul piano dai due detti raggi, saranno tali che potranno ricever luce da tutta la superficie '*L L'*, che i punti compresi fra λ' e 'Λ, come pure quelli compresi fra 'λ e Λ' anderanno ricevendo la luce di una parte successivamente minore della detta superficie, e tanto minore quanto più i punti che si considerano saranno lontani da λ', o 'λ; e che finalmente al di là di 'Λ e Λ' non potrà arrivare raggio alcuno. L'illuminazione sarà dunque più forte nello spazio 'λ λ', poi anderà scemando da λ' verso 'Λ, e da 'λ verso Λ', ed al di là di 'Λ e Λ' tutto sarà in ombra. L'intervallo compreso fra lo spazio che riceve l'illuminazione completa e l'*ombra totale*, costituisce ciò che chiamasi *penombra*.

È facile di calcolare l'estensione della parte completamente illuminata e quella della penombra colle regole della geometria. Per darne un esempio semplice, sia il corpo luminoso, come avviene nei casi più comuni, ad una grande distanza in confronto delle dimensioni delle camera

oscura. Per la grande distanza di questo corpo l' angolo da esso sotteso sarà sensibilmente eguale, sia che i raggi visuali condotti alle sue stremità partano dal punto G, ove s' incontrano i raggi $L'\lambda'$, $'L'\lambda$ che radono i rispettivi lembi del foro, o bene dal punto H dove s' incontrano i raggi $L'\Lambda'$, $'L'\Lambda$ che radono alternativamente i lembi opposti del foro. L' angolo $L'GL$ sarà quindi in questo caso eguale a $L'HL$, e perciò, come è facile di dimostrarsi, sarà anche $HF = FG$. Ciò osservato pongasi per brevità

$$L'GL = L'HL = D \quad ; \quad FG = FH = X$$
$$FF = f \quad ; \quad FP = p$$
$$GP = x_1 = X - p \qquad P\lambda' = y_1$$
$$HP = x_2 = X + p \qquad '\Lambda P = y_2$$

i triangoli rettangoli GFF, $GP\lambda'$, $'\Lambda PH$ daranno

$$f = X \tan D \quad ; \quad y_1 = x_1 \tan D \qquad y_2 = x_2 \tan D.$$

Sottraendo queste equazioni rispettivamente la precedente dalla seguente, e sostituendo per x_1 ed x_2 i loro valori, si ha

$$y_1 = f - p \tan D \qquad y_2 - y_1 = 2p \tan D,$$

e questi valori di y_1 ed $y_2 - y_1$ faranno conoscere le estensioni cercate, della metà dello spazio completamente illuminato, e della larghezza della penombra.

Se la distanza p non fosse grande, il foro di grandezza mediocre, ed il corpo luminoso fosse il sole, pel quale $D = 16'$, la semilarghezza y_1 dello spazio d' illuminazione completa sarebbe sensibilmente eguale ad f, per la piccolezza del fattore $\tan D$ e la larghezza $y_1 - y_2$ della penombra sarebbe assai piccola. Questo è ciò che succede quando si riceve in una camera oscura la luce solare da un foro di qualche larghezza sopra un piano non molto distante: l' immagine differisce assai poco dalla grandezza del foro, e la penombra è molto ristretta.

5. Se il piano che riceve la luce nell' interno della camera oscura è ad una distanza dal foro maggiore di FG, come sarebbe in $P'P'P'$, fig. 140, nessun punto di questo piano potrà ricevere luce da tutta la superficie luminosa. Le rette condotte da un punto qualunque dello spazio $'\lambda\lambda'$ radenti i bordi $'F$, F' del foro anderanno sempre a terminare su d' un punto L_1 del corpo luminoso, e come posto $'\lambda\lambda'$ piccolo, comprenderanno sempre una porzione eguale della superficie del detto corpo l' illuminazione sarà uniforme in questo spazio. Rispetto ai punti più distanti dall' asse di $P'\lambda'$, le rette condotte da uno qualunque di essi, radente il bordo $'F$, prolungata anderà a passare fuori del corpo luminoso, e quindi la parte rimanente di questo corpo che potrà irradiare sullo stesso punto sarà minore, e diverrà sempre più piccola più il punto sarà lontano da λ', e terminerà coll' essere nulla quando i punti cadranno sul

prolungamento delle rette che passano per gli estremi del corpo luminoso e pei bordi alternativamente opposti del foro.

Usando di denominazioni analoghe alle precedenti, e considerando le rette $'L\,F'$ ed $'L\,'F$ come parallele fra loro, stante la grande distanza del corpo luminoso, i triangoli $F\,H\,F'$, $'\lambda\,G\,P'$, $'\Lambda\,H\,P$ ci daranno ancora

$$f = X \tan D \quad ; \quad y_1 = x_1 \tan D \quad ; \quad y_2 = x_2 \tan D,$$

ma i valori di x_1 ed x_2 si cangeranno nei seguenti

$$x_1 = p - X \quad ; \quad x_2 = p + X:$$

quindi sommando e sottraendo si avrà.

$$y_1 = p \tan D - f \quad ; \quad y_2 - y_1 = 2\,X \tan D.$$

Se il foro è assai piccolo, comparativamente alla distanza p del piano dal foro, talchè sia $p \tan D$ molto $> f$, ed X molto piccolo, lo spazio uniformemente illuminato $2y_1$, differirà poco da $2\,p \tan D$, e la penombra, $y_2 - y_1$, sarà assai piccola. Questo è il caso di quando si riceve da un piccolo foro la luce del sole ad nna grande distanza, come nelle meridiane del Duomi di Milano, di Bologna, di Firenze ec.

6. Gli effetti di luce che abbiamo visto esistere nel caso di un corpo luminoso che irradia per nn foro in una camera oscura, si trasportano evidentemente al caso di un corpo opaco che intercetti la luce di uno spazio illuminato prendendoli tutti in senso inverso. Così vi sarà ombra dove prima vi era illuminazione completa, e viceversa; e vi sarà una penombra con gradazione di luce in ordine inverso dove vi era una penombra, o soltanto un' illuminazione parziale.

Nota II.

Sulla riflessione fatta dai prismi isosceli.

1. Per dimostrare la proprietà che hanno i prismi isosceli di riflettere i raggi che incontrano con poca inclinazione la loro base, come se cadessero su d'uno specchio piano, basta gettare nn'occhiata sulla figura 143 nella quale $B\,A\,C$ rappresenta il profilo del prisma isoscele, $L\,I$ il raggio incidente, il quale dopo due rifrazioni ed una riflessione intermedia sorte nella direzione $I'\,L'$.

Elevando dai punti d'incontro I, R ed I' del raggio luminoso le perpendicolari alle facce ed alla base del prisma, le leggi della rifrazione e riflessione ci daranno

$$\begin{aligned} &\sin R\,I\,q = n \sin L\,I\,p \\ (1)\qquad &I'\,R\,Q = I\,R\,Q \\ &\sin R\,I'\,q' = n \sin L'\,I'\,p': \end{aligned}$$

ma per essere il prisma isoscele gli angoli fatti dalle perpendicolari alle due facce colla perpendicolare alle base sono eguali, e si ha

$$I q Q = I' q' Q:$$

dunque nei triangoli $q\,I\,R$, $q'\,I'\,R$ il terzo angolo sarà oguale al terzo, e si avrà

$$R\,I\,q = R\,I'\,q'$$

e quindi dalla prima e terza equazione risulterà

$$L\,I\,p = L'\,I'\,p';$$

per cui sarà anche $L\,i\,s = L'\,i\,s'$, ed i due raggi avranno la stessa direzione come se fossero riflessi in i dalla superficie piana $s\,i\,s'$ parallela alla base $B\,C$. Se il raggio incidente $L\,I$ fosse parallelo alla base $B\,C$ del prisma, anche il raggio emergente sarà parallelo alla stessa base.

2. Quando un raggio di luce che ha trascorso un mezzo rifrangente all'uscire non passa nel vôto, ma in un altro mezzo di diversa refrangibilità, la rifrazione si opera come se il valore dell'indice fosse il rapporto dei due indici di rifrazione. Così n essendo l'indice di rifrazione del primo mezzo, n' quello del secondo, se il raggio passasse nel vôlo si avrebbe secondo la formola (2) del testo,

$$\sin e = n \sin i,$$

e se dal vôto entrasse nel secondo mezzo risulterebbe

$$\sin e = n' \sin i',$$

paragonando questi due valori di $\sin e$ si ottiene

$$\sin i' = \frac{n}{n'} \sin i.$$

Cioè il seno dell'angolo che fa il raggio colla perpendicolare nel secondo mezzo è a quello che fa nel primo mezzo nel rapporto inverso dei due indici rispettivi di rifrazione, il che è confermato dall'esperienza.

Il raggio sarebbe al termine della rifrazione e comincerebbe ad essero riflesso dal secondo mezzo, quando si avesse $\sin i' = 1$, cioè $\sin\ i = \frac{n'}{n}$.

3. Se si ha un prisma isoscelo colla sua base orizzontale esposto alla luce del cielo, stando dalla parte opposta, si vedrà una parte del cielo riflesso dalla base. I raggi di questa luce nel limite che sta dal lato dell'osservatore saranno quelli che potranno venire riflessi sotto l'incidenza minima, e misurando l'angolo che essi fanno colla verticale, si potrà determinare l'indice di rifrazione di un secondo mezzo meno rifrangente posto di sotto in contatto colla base, ancorchè per difetto di trasparenza fosse difficile di determinarlo direttamente. Infatti conoscendo per l'osservazione l'angolo $L'\,i\,c$, fig. 143, ed essendo dato l'angolo $I'\,b\,i$ eguale all'angolo B del prisma, anche l'angolo $L'\,I'\,p'$ sarà determinabile, perchè nel triangolo $i\,I'\,b$ si ha

$$i\,I'\,b = L'\,I'\,p' = I'\,i\,c - B.$$

Dal valore di $L'\,I'\,p'$ si può passare a quello di $R\,I'\,q'$ per mezzo della terza delle equazioni (1) la quale ci dà

$$\sin R\,I'\,q' = \frac{1}{n} \sin L'\,I'\,p'$$

e poi si avrà

$$I'\,R\,Q = R\,I'\,q' + I'\,q'\,R = R\,I'\,q' + B.$$

Ma $P\,R\,Q$ essendo l'angolo in cui termine la rifrazione deve essere

$$\sin I\,R\,Q = \frac{n'}{n}$$

dunque sarà

$$n' = n \sin I\,R\,Q.$$

NOTE ALLA LEZIONE XXIV.

Nota I.

Degli indici di rifrazione, della dispersione di varie sostanze, e dell'acromatismo.

1. Farò precedere la tavola dei valori degli indici di rifrazione e della dispersione delle varie sostanze da una dimostrazione geometrica delle proprietà del prisma di rifrazione, che sono state accennate all'articolo 1, le quali sono il fondamento teorico dei processi con cui i valori dei detti indici sono stati determinati.

La figura 144 rappresenta il prisma in una situazione arbitraria; $'P'p$ e $P'p'$ sono le due perpendicolari alle sue facce d'incidenza ed emergenza, $'Li$ è il raggio incidente, ie il raggio rifratto la prima volta nell'interno del prisma, eL' il raggio emergente rifratto una seconda volta nell'uscire; e $i'l$ ed el' segnano le direzioni dei due raggi esterni prolungate entro il prisma.

Se si dinotano con $'I$ ed $'E$ gli angoli d'incidenza e rifrazione del raggio quando entra nel prisma, e con E' ed I' quelli quando esce, per la legge della rifrazione si ha

$$(1) \qquad \sin {}'I = n \sin {}'E \quad ; \quad \sin I' = n \sin E'.$$

Di più chiamando F l'angolo, BAC, rifrangente del prisma, e Δ l'angolo di deviazione, ed osservando che questi angoli sono rispettivamente eguali a $'pp P'$ ed $'l l' e$, i quali come esterni ai triangoli $p'ei$, $l'ei$, equivalgono alla somma dei due interni opposti, si avrà

$$(2) \quad {}'E + E' = F \quad , \quad {}'I - {}'E + I' - E' = \Delta \quad ; \quad (3) \quad {}'I + I' = \Delta + F.$$

Quando $'E = E'$, come nella figura 145, il corso del raggio nell'interno è parallelo alla base, e si ha la deviazione minima, e lo spettro nella massima vivacità. In questo caso le due ultime formole si riducono a

$$(2') \quad {}'E = E' = \tfrac{1}{2} F = E \qquad (3') \quad {}'I = I' = \tfrac{1}{2}(F + \Delta) = I;$$

ed una qualunque delle due equazioni (1) ci darà

$$(4) \qquad n = \frac{\sin \frac{1}{2}(F + \Delta)}{\sin \frac{1}{2} F}.$$

Conoscendo così l'angolo rifrangente del prisma, ed avendo misurato l'angolo di deviazione Δ, si potrà con questa formola calcolare l'indice di rifrazione n.

Come dando ai raggi l'incidenza della deviazione minima il valore di Δ risulta maggiore pei raggi di quei colori che più si scostano

dall'estremità rossa dello spettro, e s'accostano all'estremità violetta, ne risulta che l'indice di rifrazione dovrà essere maggiore per questi raggi, i quali perciò sono chiamati raggi più rifrangibili.

Per dimostrare che, quando il raggio entra ed esce per le facce del prisma egualmente inclinato alle medesime, la deviazione è minima, bisogna far vedere che detta Δ_0 la deviazione in questo caso si ha sempre $\Delta > \Delta_0$, o sia giusta le formole (3) e (3'), $\frac{1}{2}('I + I') > I$.

Quando il raggio nell'interno è diversamente inclinato alle due facce del prisma, $'E$ ed E' saranno diseguali, ma, come per la formola (2) uno deve crescere quanto l'altro diminuisce, si avrà

$$'E = E - \omega \qquad E' = E + \omega;$$

ω potendo essere un angolo positivo o negativo.

Le formole (1), applicate ai due casi, ci daranno poi

$$\sin 'I = n \sin (E - \omega)$$
$$\sin I = n \sin E$$
$$\sin I' = n \sin (E + \omega).$$

Sviluppando i seni del secondo membro e ponendo $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \omega$ in luogo di $\cos \omega$, si avrà

$$\sin 'I = n \sin E - n \cos E \sin \omega - 2 n \sin E \sin^2 \tfrac{1}{2} \omega$$
$$\sin I = n \sin E$$
$$\sin I' = n \sin E + n \cos E \sin \omega - 2 n \sin E \sin^2 \tfrac{1}{2} \omega.$$

Prendendo le differenze successive di queste equazioni si ottiene

$$\sin I - \sin 'I = n \cos E \sin \omega + 2 n \sin E \sin^2 \tfrac{1}{2} \omega$$
$$\sin I' - \sin I = n \cos E \sin \omega - 2 n \sin E \sin^2 \tfrac{1}{2} \omega;$$

e prendendo poscia la somma, e differenza di queste si ha

$$\sin I' - 2 \sin I + \sin 'I = - 4 n \sin E \sin^2 \tfrac{1}{2} \omega$$
$$\sin I' - \sin 'I = 2 n \cos E \sin \omega.$$

Sostituiamo a $\sin 'I + \sin I'$ e $\sin I' - \sin 'I$, i loro valori espressi per la semisomma e semidifferenza degli angoli $'I$ ed I', ed aggiungiamo ai due membri della prima equazione il termine $4 \sin I \sin^2 \frac{1}{2} (I' - I)$, si dedurrà

$$\sin \tfrac{1}{2} ('I + I') - \sin I = \frac{2 \sin I}{\cos \frac{1}{2} ('I + I')} \left(\sin^2 \tfrac{1}{2} (I' - 'I) - \sin^2 \tfrac{1}{2} \omega \right)$$

$$\sin \tfrac{1}{2} (I' - 'I) = \frac{n \cos E}{\cos \frac{1}{2} ('I + I')} \sin \omega;$$

la prima delle quali è stata ridotta ponendo in essa $\sin I$ in luogo di $n \sin E$.

Ora, se si osserva che E può stare in luogo di $\frac{1}{2} ('E + E')$, che gli angoli $'E$, E, E'; $'I$, I, I' sono tutti minori di un retto, e che per le

formole (1), nelle quali $n > 1$, gli angoli $'I$ ed I' sono rispettivamente maggiori di $'E$ ed E', si vede che deve essere $\cos \frac{1}{2} ('I + I') < \cos E$, ed a più forte ragione $< n \cos E$. Dunque nella seconda delle precedenti equazioni $\frac{1}{2} (I' - 'I)$ sarà $> \omega$, e perciò il secondo membro della prima equazione sarà positivo, e si avrà

$$\sin \tfrac{1}{2} ('I + I') > \sin I, \text{ e quindi } \tfrac{1}{2} ('I + I') > I$$

o vero, giusta le formole (3), (3'), $\Delta > \Delta_0$, come doveva dimostrarsi.

2. Osservando l'immagine dello spettro solare formata nel fuoco del canocchiale di un teodolito, il celebre ottico di Benedictbaiern ha misurato le deviazioni Δ_0 dei colori prossimi alle linee principali dello spettro B, C, D, E, F, G, H; e quindi dalla formola (4) ha dedotto i valori rispettivi degli indici di rifrazione riferiti nella seguente tavola

Tavola degli indici di rifrazione, dedotti dalle esperienze di Fraunhofer.

NOME DELLE SOSTANZE	B_n	C_n	D_n	E_n	F_n	G_n	H_n	PESO specifico
Flint-glass. n.° 13.	1,62775	1,62968	1,63504	1,64202	1,64826	1,66028	1,67106	3,723
Crown glass. n.° 9.	1,52583	1,52685	1,52959	4,53300	1,53605	1,54166	1,54657	2,535
Acqua.	1,33094	1,33171	1,33357	1,33585	1,33782	4,34126	1,34418	1,000
Detta.	1,33098	1,33171	1,33358	1,33585	1,33779	1,34126	1,34416	1,000
Potassa	1,39963	1,40051	1,40280	1,40563	1,40808	1,41258	1,41637	1,416
Olio di trementina	1,47050	1,47153	1,47443	1,47835	1,48174	1,48820	1,49387	0,885
Flint-glass. n.° 3.	1,60204	1,60380	1,60849	1,61453	1,62004	1,63077	1,64037	3,512
Flint glass. n.° 30.	1,62357	1,62548	1,63058	1,63736	1,64347	1,65541	1,66607	3,695
Crown glass. n.° 13.	1,52431	1,52530	1,52798	1,53137	1,53434	1,53991	1,54468	2,535
Crown glass. M. .	1,55477	1,55593	1,55907	1,56315	1,56674	1,57353	1,57947	2,756
Flint glass. n.° 23.	1,62660	1,62847	1,63367	1,64049	1,64676	1,65885	1,66969	3,724
Detto.	1,62656	1,62845	1,62367	1,64054	1,64678	1,65885	1,66968	3,724

Per le altre sostanze non possediamo ancora dei valori degli indici di rifrazione così estesi alle varie parti dello spettro, e tanto precise, ma Sir D.r Brewster ha fornito la seguente tavola, costrutta su delle esperienze proprie, la quale dà i valori degli indici medii di rifrazione, e della dispersione di molte sostanze.

Tavola dei valori degli indici di rifrazione e della dispersione di varie sostanze.

NOMI DELLE SOSTANZE	INDICI di rifraz. n	DISPER. dei raggi estremi $n_v - n_r$	NOMI DELLE SOSTANZE	INDICI di rifraz. n	DISPER. dei raggi ester. $n_v - n_r$
Risigallo, Sandracca minerale, fuso . . .	2,549	0,394	Flint-glass.	1,576	0,028
Diamante	2,470	0,050	Vetro di color rosa .	1,570	0.025
Fosforo.	2,224	0,156	Corno	1,565	0,025
Solfo fuso.	2,148	0,149	Gomma mastice. . .	1,560	0,022
Solfato di piombo . .	1,925	0,056	Sal gemma di rocca .	1,557	0,029
Granato	1,815	0,027	Copale	1,555	0,024
Zaffiro turchino. . .	1,794	0,021	Zucchero fuso raffreddato.	1,555	0,020
Piropo	1,792	0,020	Balsamo del Canadà .	1,532	0,024
Rubino.	1,779	0,031	Resina	1,550	0,032
Feldspato	1,764	0,022	Olio di tabacco . . .	1,547	0,035
Crisoberillo	1,760	0,019	Pece di Borgogna . .	1,546	0,024
Assinite	1,735	0,022	Incenso.	1,540	0,028
Vetro di color rosso-oscuro	1,729	0,044	Trementina di Chio .	1,545	0,028
Vetro di color aranciato.	1,095	0,042	Gomma olibana. . .	1,544	0,024
Solfuro di carbone. .	1,678	0,077	Acido fosforico solido.	1,544	0,017
Tormalina.	1,668	0,019	Olio d'anici	1,536	0,044
Vetro opalo	1,635	0,038	Crown glass	1,534	0,018
Olio di cassia . . .	1,031	0,089	Borace fuso	1,532	0,014
Balsamo di Tolù . .	1,627	0,065	Fosforo fuso	1,532	0,017
Flint-glass.	1,016	0,032	Balsamo del Coppaiba.	1,528	0,021
Vetro verde	1,615	0,037	Leucite.	1,527	0,018
Vetro di color porpora.	1,608	0,031	Acido citrico. . . .	1,527	0,019
Olio di mandorle amare.	1,603	0,048	Gomma arabica. . .	1,513	0,018
Guajaco	1,600	0,041	Olio di botri. . . .	1,510	0,026
Balsamo del Perù . .	1,593	0,058	Olio di comino . . .	1,508	0,033
Scaglie di tartaruga .	1,591	0,027	Stilbite.	1,508	0,021
Balsamo stirace. . .	1,584	0,039	Olio di finocchio . .	1,507	0,028
Vetro di bottiglia . .	1,582	0,023	Detto di legno di Rodi.	1,505	0,022
Gomma ammoniaca .	1,578	0,037	Detto di menta salvatica.	1,496	0,026

NOMI DELLE SOSTANZE	INDICI di rifraz. n	DISPER. dei raggi estremi $n_v - n_r$	NOMI DELLE SOSTANZE	INDICI di rifraz. n	DISPER. dei raggi estremi $n_v - n_r$
Olio d' Isopo	1,495	0,022	Detto nitrico (p. s. 1,48).	1,410	0,019
Balsamo di zolfo . .	1,494	0,022	Detto nitroso. . . .	1,404	0,018
Olio di noce moscada.	1,491	0,021	Detto malico. . . .	1,395	0,011
Detto d' angelica . .	1,491	0,025	Olio d' ambra grigia. .	1,379	0,012
Detto di maggiorana .	1,490	0,022	Alcool	1,377	0,011
Detto di ricino . . .	1,490	0,018	Etere	1,374	0,012
Detto di limone. . .	1,489	0,023	Bianco d'ovo di gallina.	1,359	0,013
Ossidiana	1,488	0,018	Criolite.	1,349	0,007
Allùme.	1,488	0,017			
Olio di fien greco . .	1,487	0,024	Colla di pesce (*medusa aequorea*) . .	1,345	0,013
Detto d' aneto . . .	1,487	0,023	Acqua	1,330	0,012
Detto di timo . . .	1,486	0,024	Ghiaccio	1,308	——
Detto di puleggio . .	1,485	0,024	Vòto.	1,000	0,000
Detto d' assenzio . .	1,485	0,022	*Occhio* Umor acqueo d' uomo.	1,3366	
Detto di papaveri . .	1,483	0,020	di merluzzo . .	1,341	0,012
Detto di carvi . . .	1,483	0,024	Umor vitreo d' uomo.	1,3394	
Detto di savina . . .	1,482	0,021	di merluzzo. .	1,340	0,012
Detto di mandorle. . .	1,481	0,048	d' agnello. . .	1,345	
Detto di cajeput. . .	1,478	0,021	di piccione . .	1,353	
Detto di trementina .	1,476	0,020	Cristallino d' uomo		
Olio d' olive	1,476	0,018	alla superficie.	1,3707	
Borace (p. s. 1,714) .	1,475	0,014	nell' interno. .	1,3786	
Olio di semi di rapa .	1,475	0,019	al centro. . .	1,3990	
Detto di lavanda . .	1,475	0,021	Cristallino d' agnello		
Detto di ginepro . .	1,474	0,022	alla superficie .	1,386	
Detto di bergamotta .	1,473	0,023	nell' interno. .	1,428	
Detto di rosmarino. .	1,472	0,020	al centro . . .	1,436	
Detto di balena. . .	1,471	0,021	Cristallino di merluzzo		
Detto di ruta. . . .	1,449	0,016	alla superficie .	1,410	
Acido solforico . . .	1,440	0,014	al centro. . .	1,439	
Detto fosforico, fluido.	1,426	0,012	Cristallino di piccione.	1,406	

In questa tavola abbiamo adottato le riduzioni che Young ha fatto ai valori degli indici di rifrazione dati a dSir D. Brewster.

Tavola degli indici di rifrazione dei gas alla temperatura del ghiaccio che si fonde e sotto la pressione di 0m,76, determinati da Dulong.

NOMI DELLE SOSTANZE	VALORI DEGLI INDICI DI RIFRAZ. n	NOMI DELLE SOSTANZE	VALORI DEGLI INDICI DI RIFRAZ. n
Idrogeno	1,000138	Idrogeno solforato . .	1,000644
Ossigeno	1,000272	Acido solforoso . . .	1,000665
Aria atmosferica . .	1,000294 Biot.	Gas oleficante . . .	1,000678
Azoto	1,000300	Cloro	1,000772
Gas nitroso	1,000303	Idrogene protofosforato	1,000789
Ossido di carbonio . .	1,000340	Cianogene	1,000834
Ammoniaca	1,000385	Etere muriatico . . .	1,001095
Gas di palude . . .	1,000443	Fosgene, o gas ossi-cloro-carbonico . . .	1,001159
Acido carbonico . . .	1,000449		
Acido muriatico . . .	1,000449	Vapor di solfo carburato	1,001500
Acido idrocianico . .	1,000451		
Ossido d'azoto . . .	1,000503	Vapor d'etere solforico (in ebolliz. a 35° cent.)	1,001580

Gli indici di rifrazione non sono soltanto variabili colla temperatura nei gas, ma anche un poco nei corpi solidi ed in un modo assai sensibile nei liquidi, d'onde nasce un'ostacolo a che i liquidi siano impiegati con successo nella costruzione degli stromenti ottici.

3. Poste queste tavole ritorniamo alla formola precedente sulla dispersione dei prismi, per trarre da essa qualche schiarimento sulla natura ed uso delle medesime, e su quanto fu detto nel testo.

Quando l'angolo rifrangente F del prisma, e l'angolo d'incidenza E fossero piccoli, talchè questi angoli potessero essere sostituiti ai loro seni, le formole precedenti (1)., divengono assai semplici.

In questo caso si ha

$$'I = n'E \quad , \quad 'E + E' = F \quad , \quad I' = n E'$$

e l'equazione (3) colla sostituzione di questi valori di $'I$, I' ed $'E + E'$ ci darebbe

$$(7) \qquad \Delta = (n - 1)\,F$$

cioè la deviazione, o l'angolo, che farebbe la direzione del raggio prima d'entrare nel prisma colla sua direzione dopo che è uscito, sarebbe costante ed eguale all'angolo rifrangente del prisma moltiplicato per l'indice di rifrazione diminuito dell'unità. La deviazione é sempre opposta all'angolo rifrangente del prisma, cioè il raggio dopo la rifrazione piega verso la base del prisma, supposto che esso sia di una sostanza più rifrangente del mezzo in cui è posto.

Se perciò si vuole riferire la deviazione del raggio ad una retta data di posizione, si considererà il valore di F come positivo o negativo secondo che l'angolo rifrangente del prisma sarà rivolto verso questa retta o dalla parte opposta.

Se indichiamo con n_r l'indice di rifrazione dei raggi rossi, e con n_v quella dei raggi violetti, si avranno per queste due specie di raggi le equazioni

$$(8) \qquad \Delta_r = (n_r - 1)\,F \qquad\qquad \Delta_v = (n_v - 1)\,F:$$

la loro differenza

$$(9) \qquad \Delta_v - \Delta_r = (n_v - n_r)\,F$$

sarà la larghezza dello spettro, il coefficiente $n_v - n_r$, che misura questa larghezza proporzionalmente all'angolo rifrangente del prisma, chiamasi dagli ottici *dispersione totale*, se in luogo degli indici di rifrazione dei raggi estremi dello spettro si impiegano i valori degli indici di rifrazione di due colori intermedi, la differenza $n_k - n_i$ chiamasi *dispersione parziale*.

Facendo la somma delle due equazioni (8) si ha

$$\tfrac{1}{2}(\Delta_r + \Delta_v) = \left\{\tfrac{1}{2}(n_r + n_v) - 1\right\} F$$

eliminando F colla precedente si deduce

$$\frac{\Delta_v - \Delta_r}{\Delta_r + \Delta_v} = \frac{n_v + n_r}{\frac{1}{2}(n_v + n_r) - 1}$$

il medio, $\frac{1}{2}(n_v + n_r)$, fra i valori degli indici di rifrazione dei raggi estremi, chiamasi *indice medio* di rifrazione; indicando con n_μ questo valore medio, così che sia

$$n_\mu = \tfrac{1}{2}(n_v + n_r),$$

si ha

$$(10) \qquad \frac{\Delta_v - \Delta_r}{\Delta_v + \Delta_r} = \frac{n_v - n_r}{n_\mu - 1}$$

il secondo membro di quest'equazione cioè, il rapporto della dispersione alla deviazione media, è quello che chiamasi nel sistema dell'emmissione *poter dispersivo*.

Acromatismo.

4. La formola (7) è mirabilmente atta a determinare le condizioni in cui devono essere due prismi onde si ottenga l'acromatismo, o sia il parallelismo dei raggi di diversi colori che hanno subìto delle rifrazioni attraversandoli. Per darne un saggio, supponiamo che il raggio, dopo aver attraversato un primo prisma, ne incontri un secondo d'un angolo rifrangente F', e di una sostanza il cui indice di rifrazione sia n'; questo raggio soffrirà un'altra deviazione espressa, come la (7), da $(n'-1)F'$, e la deviazione totale del raggio rifratto dai due prismi, sarà espressa da

$$(11) \qquad \Delta = (n-1)F + (n'-1)F'.$$

Supponiamo che n_r ed n'_r siano gli indici di rifrazione dei raggi rossi, ed n_v ed n'_v quelli dei raggi violetti, rispettivamente pei due prismi, e supponiamo che mentre il primo prisma abbia il suo angolo rifrangente rivolto abbasso, il secondo lo abbia rivolto verso l'alto, così che sia F' negativo. La deviazione dei raggi rossi sarà data da

$$(12) \qquad \Delta_r = (n_r-1)F - (n'_r-1)F'$$

e quella dei raggi violetti da

$$(13) \qquad \Delta_v = (n_v-1)F - (n'_v-1)F.$$

Se si vuole che i raggi rossi e violetti escano, come sono entrati, paralleli dopo sofferte le due rifrazioni nei prismi, dovrà essere $\Delta_r = \Delta_v$ e perciò

$$(n_r-1)F - (n'_r-1)F' = (n_v-1)F - (n'_v-1)F$$

da dove riducendo e trasportando si ricava

$$(14) \qquad \frac{F'}{F} = \frac{n_v - n_r}{n'_v - n'_r}$$

cioè gli angoli rifrangenti dei due prismi dovranno stare fra loro inversamente al rapporto delle dispersioni dei raggi estremi delle due sostanze di cui sono fatti i prismi.

Newton aveva creduto che in generale la dispersione $(n_v - n_r)F$ fosse proporzionale alla deviazione media $(\frac{1}{2}(n_v+n_r)-1)F$, o sia che i poteri dispersivi delle diverse sostanze fossero eguali. In questa ipotesi si avrebbe

$$\frac{n_v - n_r}{\frac{1}{2}(n_v+n_r)-1} = \frac{n'_v - n'_r}{\frac{1}{2}(n'_v+n'_r)-1}$$

e l'equazione (14) ci darebbe

$$\left\{\tfrac{1}{2}(n_v + n_r) - 1\right\} F - \left\{\tfrac{1}{2}(n'_v + n'_r) - 1\right\} F' = 0.$$

Se si fa la semisomma delle due equazioni (12) e (13), e si fa attenzione alla relazione precedente si ottiene

$$\tfrac{1}{2}(\Delta' + \Delta) = 0$$

cioè la deviazione media sarebbe nulla; dal che Newton conchiuse che era impossibile colla combinazione di prismi o lenti di render nulla la dispersione senza annullare contemporaneamente anche la deviazione, e che perciò era un tentativo disperato il cercare di fare dei canocchiali diottrici acromatici.

Eulero congetturò pel primo fondandosi su considerazioni astratte, e Giovanni Dollond confermò esperimentalmente in seguito che il principio di Newton, che la dispersione e la deviazione media fossero nella stessa proporzione in tutte le sostanze, non era vero. Per esempio, valendoci dei dati sperimentali più esatti che ora abbiamo, se uno dei prismi è di Crown-glass pel quale secondo la tavoletta precedente di Fraunhofer si abbia

$$n_v = 1{,}546566 \quad , \quad n_r = 1{,}525832$$

si avrà il rapporto della dispersione alla deviazione media, o sia il poter dispersivo

$$\frac{n_v - n_r}{\frac{n_v + n_r}{2} - 1} = \frac{0{,}020734}{0{,}536199} = 0{,}03867.$$

Per un prisma di Flint pel quale secondo la stessa tavoletta si ha

$$n'_v = 1{,}671062 \qquad n'_r = 1{,}627749$$

il poter dispersivo sarà dato da

$$\frac{n'_v - n'_r}{\frac{n'_v + n'_r}{2} - 1} = \frac{0{,}043313}{0{,}649403} = 0{,}06670$$

il qual valore è ben differente dal primo.

Calcolando colla formola (14) il rapporto degli angoli rifrangenti si trova

$$\frac{F'}{F} = \frac{0{,}020734}{0{,}043313} \quad \text{ed} \quad F' = 0{,}4787\, F.$$

Supponiamo l'angolo rifrangente F del prisma di *Crown-glass* eguale a 20°, quello F' del prisma di Flint-glass dovrà essere

$$F' = 0{,}47870 . \times 20^\circ = 9^\circ.\ 34',4\,,$$

onde i raggi rossi e violetti siano riuniti.

La deviazione del raggio dopo aver attraversato i due prismi, si avrà da una delle due formole (12) o (13), e si trova

$$\Delta = 4^{\circ}.\ 30',4\ ;$$

così per mezzo dei due prismi si può ottenere una deviazione di quattro gradi e mezzo di un raggio di luce naturale senza che i raggi rossi e violetti si separino.

Il rapporto delle dispersioni essendo variabile pei diversi colori combinati a due due, la formola (14) ci mostra che i prismi che rendono paralleli i raggi rossi o violetti non possono rendere paralleli perfettamente i raggi degli altri colori intermedii, che devono perciò formare degli spettri *secondari*. È facile il vedere instituendo un calcolo simile con tre prismi, che si potrebbero ridurre paralleli i raggi di tre colori, e quindi rendere quasi insensibili tutti gli spettri secondarj; è in gran parte per questo motivo che, non di rado, nella costruzione degli obbiettivi acromatici s'impiegano tre lenti (1).

Nota II.

Sul calcolo del colore composto risultante dalla mistura di più colori semplici secondo la costruzione data da Newton.

1. Indichiamo con r, a, g, u, b, i, v gli archi corrispondenti ai colori rosso, aranciato, giallo, verde, azzurro, indaco e violetto, nei quali venne da Newton divisa la circonferenza del suo cerchio cromatico, e siano

$$(a) \qquad \begin{array}{l} x_r\,,\ x_a\,,\ x_g\,,\ x_u\,,\ x_b\,,\ x_i\,,\ x_v\ ; \\ y_r\,,\ y_a\,,\ y_g\,,\ y_u\,,\ y_b\,,\ y_i\,,\ y_v\ ; \end{array}$$

le distanze, da due piani perpendicolari fra loro ed al piano del cerchio, dei centri di gravità dei detti archi.

Dinotiamo di più con

$$R,\ A,\ G,\ U,\ B,\ I,\ V$$

le quantità rispettive di colori che si vogliano mischiare. I pesi proporzionali alle quantità di questi colori sospesi ai centri di gravità degli archi rispettivi si troveranno avere il loro centro comune di gravità

(1) È da notarsi che il celebre ottico Cav. G. B. Amici è riuscito a fare dei telescopii composti di soli quattro prismi a facce piane chiamati telescopii *prismatici*, valendosi della proprietà che due prismi cogli assi paralleli possano ingrandire l'immagine dell'oggetto nella direzione dei piani perpendicolari agli assi, senza produrre dispersione.

in un punto che determinerà, come è detto nel testo, la natura del colore composto.

Le distanze dai due detti piani di questo centro comune saranno date giusta la formola (A) dell'articolo 8 della Lezione X da

$$(1)\quad \begin{aligned} X &= \frac{x_r R + x_a A + x_g G + x_u U + x_b B + x_i I + x_v V}{R + A + G + U + B + I + V} \\ Y &= \frac{y_r R + y_a A + y_g G + y_u U + y_b B + y_i I + y_v V}{R + A + G + U + B + I + V}. \end{aligned}$$

Supponiamo che i due detti piani passino pel centro del cerchio, i valori di X ed Y verranno ad essere le projezioni della distanza $\Delta = Oz$, fig. 24, del centro cercato di gravità dal centro del cerchio, sopra i due diametri che rappresentano le intersezioni del piano del cerchio coi piani medesimi. Considerando quindi il triangolo rettangolo formato dalla detta distanza Δ e dalle sue projezioni X ed Y, si riconoscerà facilmente che i valori di Δ e dell'angolo D che essa fa colla projezione X, saranno dati da

$$(2)\qquad \tan D = \frac{Y}{X}$$

$$(3)\qquad \Delta = \frac{X}{\cos D} \quad , \quad \Delta = \frac{Y}{\sin D}.$$

L'angolo D determinando il punto della circonferenza per cui passa il raggio in cui è situato il centro di gravità del colore composto, indicherà su questa circonferenza la natura di questo colore, ed i valori di Δ e di $1 - \Delta$, indicheranno le proporzioni in cui lo stesso colore e la luce bianca entreranno a formare il color composto.

Per fare il calcolo di queste quantità giusta le formole, (1), (2), (3) non restano quindi che a determinarsi i valori delle distanze projettate x, y che entrano a comporre le formole segnate (1).

Onde ottenerli comincio dall'osservare che la distribuzione degli archi, che rappresentano i rispettivi colori nel cerchio di Newton, fig. 24, è simmetrica intorno ad un diametro che vada dal punto D contiguo agli estremi degli archi rappresentanti il rosso ed il violetto alla metà dell'arco rappresentante il verde: assumeremo perciò questo diametro per quello su cui è presa la X, e quello in cui sta la Y gli sarà perpendicolare.

Di più osserveremo che per essere

$$\begin{aligned} r = u = v &= 60^{\circ}.\ 45'.\ 34'' \\ a = i &= 34\ .\ 10\ .\ 38 \\ g = b &= 54\ .\ 41\ .\ \ 1 \end{aligned}$$

gli archi rappresentanti il rosso, il verde ed il violetto avranno il loro

centro di gravità ad una stessa distanza dal centro del cerchio, che rappresenteremo Γ_1, quelle degli archi dell'aranciato e dell'indaco saranno parimente eguali e le rappresenteremo con Γ_2, e quelle pure eguali degli archi del giallo e dell'azzurro le rappresenteremo con Γ_3. Ciò posto pel motivo che i centri di gravità degli archi di cerchio si trovano situtati sul raggio che va alla metà dell'arco rispettivo, sarà facile di vedere che si ha

$$
\begin{array}{ll}
x_r = \Gamma_1 \cos \tfrac{1}{2} r & y_r = \Gamma_1 \sin \tfrac{1}{2} r \\
x_a = \Gamma_2 \cos (r + \tfrac{1}{2} a) & y_a = \Gamma_2 \sin (r + \tfrac{1}{2} a) \\
x_g = \Gamma_3 \cos (r + a + \tfrac{1}{2} g) & y_g = \Gamma_3 \sin (r + a + \tfrac{1}{2} g) \\
x_u = -\Gamma_1 & y_u = 0 \\
x_b = \Gamma_3 \cos (u + i + \tfrac{1}{2} b) & y_b = -\Gamma_3 \sin (u + i + \tfrac{1}{2} b) \\
x_i = \Gamma_2 \cos (u + \tfrac{1}{2} i) & y_i = -\Gamma_2 \sin (u + \tfrac{1}{2} i) \\
x_v = \Gamma_1 \cos \tfrac{1}{2} u & y_v = -\Gamma_1 \sin \tfrac{1}{2} u ;
\end{array} \tag{4}
$$

osservando che alla semicirconferenza, ed al di là della semicirconferenza esistano le relazioni

$$
\begin{array}{l}
r + a + g + \tfrac{1}{2} u = 180^\circ = u + i + b + \tfrac{1}{2} u \\
r + a + g + u + \tfrac{1}{2} b = 360^\circ - v - i - \tfrac{1}{2} b \\
r + a + g + u + b + \tfrac{1}{2} i = 360 - v - \tfrac{1}{2} i \\
r + a + g + u + b + i + \tfrac{1}{2} v = 360 - \tfrac{1}{2} v .
\end{array}
$$

Nel n.° 2 della Nota I della Lezione X si è dimostrato che si ottiene la distanza del centro di gravità di un arco di cerchio dal centro del medesimo cerchio, il cui raggio sia supposto eguale all'unità, dividendo la corda per l'arco: si avrà dunque

$$
\Gamma_1 = \frac{360^\circ}{2\pi} \cdot \frac{2 \sin \tfrac{1}{2} r}{r} ; \quad \Gamma_2 = \frac{360^\circ}{2\pi} \cdot \frac{2 \sin \tfrac{1}{2} a}{a} ; \quad \Gamma_3 = \frac{360^\circ}{2\pi} \cdot \frac{2 \sin \tfrac{1}{2} g}{g}
$$

Ponendo in queste formole $\pi = 3,14159$, e per r, a e g i valori dati sopra, si ottiene

$$
\Gamma_1 = 0,95380 \quad ; \quad \Gamma_2 = 0,98524 \quad ; \quad \Gamma_3 = 0,96247
$$

e quindi dalla formola (4) si avrà, impiegando i valori dati degli archi

$$
\begin{array}{ll}
x_r = x_v = 0,82284 & y_r = -y_v = 0,48233 \\
x_a = x_i = 0,20740 & y_a = -y_i = 0,96316 \\
x_g = x_b = -0,51399 & y_g = -y_b = 0,81374 \\
x_u = -0,95380 & y_u = 0.
\end{array}
$$

Così dati che siano i colori R, A, G, V, B, I, U tutto sarà cono-

sciuto nelle duo formole (1), e le due formole segnate (2) e (3) ci daranno gli elementi cercati in ogni caso.

Si può osservare che le formole (1) si riducano alle seguenti

$$X = \frac{0{,}82284\,(R + V) + 0{,}20740\,(A + I) - 0{,}51399\,(G + B) - 0{,}95380\,U}{R + A + G + U + B + I + V}$$

$$Y = \frac{0{,}48235\,(R - V) + 0{,}96316\,(A - I) + 0{,}81374\,(G - B)}{R + A + G + U + B + I + V}$$

che sono più semplici pel calcolo numerico.

NOTE ALLA LEZIONE XXVI.

Nota 1.

Formole per la composizione delle vibrazioni prodotte da più sistemi d'onde simili.

Se l'atomo invece d'essere investito contemporaneamente da due soli sistemi d'onde lo fosse da un più gran numero di sistemi tutti simili fra loro, cioè le cui onde fossero tutte della stessa lunghezza, indicando con i'', f', i''', f'', ec. le velocità massime, e le fasi corrispondenti a questi sistemi, pel principio della coesistenza dei piccoli movimenti si avrebbe la velocità composta v dell'atomo dall'equazione

$$v = i \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{f}{\lambda}\right) + i' \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{f}{\lambda}\right) + i'' \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{f'}{\lambda}\right) + i''' \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{f''}{\lambda}\right) \text{ec}$$

Dalla quale ponendo per brevità

$$i \cos 2\pi \frac{f}{\lambda} + i' \cos 2\pi \frac{f'}{\lambda} + i'' \cos 2\pi \frac{f''}{\lambda} + i''' \cos 2\pi \frac{f'''}{\lambda} + \text{ec.} = \Sigma\, i \cos 2\pi \frac{f}{\lambda};$$

$$i \sin 2\pi \frac{f}{\lambda} + i' \sin 2\pi \frac{f'}{\lambda} + i'' \sin 2\pi \frac{f''}{\lambda} + i''' \sin 2\pi \frac{f'''}{\lambda} + \text{ec.} = \Sigma\, i \sin 2\pi \frac{f}{\lambda};$$

si ricava con un processo simile a quello seguito nel testo

$$v = I \sin 2\pi \left(\frac{t}{\lambda} - \frac{\varphi}{\lambda}\right);$$

essendo

$$I^2 = \left(\Sigma\, i \sin 2\pi \frac{f}{\lambda}\right)^2 + \left(\Sigma\, i \cos 2\pi \frac{f}{\lambda}\right)^2,$$

$$\tan 2\pi \frac{\varphi}{\lambda} = \frac{\Sigma\, i \sin 2\pi \frac{f}{\lambda}}{\Sigma\, i \cos 2\pi \frac{f}{\lambda}}.$$

Dal che si vede che l'oscillazione risultante dell'atomo è simile alle componenti, e viene fatta con una velocità massima e con una fase data dalle due ultime formole.

Si potrebbero generalizzare ancor più queste formole impiegando sempre gli stessi principii; ma attenendoci alla supposizione che le vibrazioni degli atomi siano analoghe alle oscillazioni dei pendoli cicloidali, e tutte simili fra loro, le formole esposte sono sufficienti nei casi di cui avremo a trattare.

NOTE ALLA LEZIONE XXVIII.

Nota I.

Nozioni sull' iperbola.

Se da due punti fissi F ed F' Fig. 146 si conducono due rette $F\,M$, $F'\,M$ che s'incontrino in M in una direzione qualunque ma tali che la loro differenza $F'\,M - F\,M$ sia sempre costante ed eguale a $V\,V'$, la serie dei punti M così costruiti forma la curva che i geometri chiamano *Iperbola*. Questa curva è di una natura anologa a quella che nella Lezione V. abbiamo chiamato ellisse: in quella curva era la somma dei due raggi vettori $F\,M$ ed $F'\,M$ che era costante, in questa è la differenza. Prendendo la differenza $F'\,M - F\,M$ tanto pei punti situati sopra, quanto per quelli situati sotto l' asse $F\,F'$, e tanto positivamente quanto negativamente, cioè da una parte e dall' altra dei punti F ed F', si vede che l' iperbola è formata da quattro rami simili che si estendono all' infinito. I punti F èd F' si chiamano i *fuochi* dell'Iperbola, ed i punti $V\,V'$, dove la curva taglia l' asse $F\,F'$, i *vertici*. Se da V o V' come centro con un raggio eguale ad $O\,F$ metà di $F\,F'$ si tagliano sulla perpendicolare all' asse nel punto O, due punti T, T' la retta $T\,T'$ si chiama asse *trasverso*, e la distanza $V\,V'$ porta il nome di asse *non trasverso*.

Applichiamo queste nozioni della proposizione data all' articolo 10 di questa Lezione. L'ispezione della fig. 46, in cui $P''\,D$ è di due seimiondulazioni più lunga di $P''\,2$, ed $F\,2$ è eguale ad $F\,D$, ci mostra che $F\,P''$ differisce da $D\,P''$ della distanza $F\,D$ diminnita di due semiondulazioni. Tutti i punti P'' della prima linea oscura, fig. 43, trovandosi distanti da F e da D di quantità cbe differiscono fra loro della differenza costante $D\,F - 2\,l$, si troveranno su di una iperbola della quale $\frac{1}{2}\,D\,F - l$ sarà il semiasse non trasverso, e $\frac{1}{2}\sqrt{D\,F^2 - (D\,F - 2\,l)^2}$ il semiasse trasverso. Chiamando a, e b i due semiassi si avrà così

$$a = \tfrac{1}{2}\,D\,F - l \qquad ; \qquad b = \sqrt{l\,.\,D\,F}.$$

dove nel valore di b abbiamo trascurato il termine l^2, cioè il quadrato della lunghezza di una semiondulazione, come troppo piccolo.

Collo stesso discorso chiamando in generale n l' indice della curva chiara od oscura corrispondente ad una differenza di n semiondnlazioni, si vedrà che i suoi semiassi saranno espressi da

$$a = \tfrac{1}{2}\,(D\,F - n\,l) \qquad ; \qquad b = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\,n\,l.\,D\,F}.$$

Ma questi risultamenti si scostano in parte dal vero per la ragione che si è detta nel testo.

NOTA II.

Dimostrazione della proposizione citata all' articolo 5,

La legge della riflessione ci dà, fig. 41;

$$LIS' = S'IA \quad ; \quad LJS' = S'JB$$

e quindi sommando queste equazioni

$$LIS' + LJS = S'IA + S'JB.$$

Ma per le note proprietà degli angoli dei triangoli si ha

$$LIS = \pi - IS'L - ILS' \quad , \quad LJS' = \pi - JS'L - JLS';$$

$$S'IA = IS'E + IES' \quad , \quad S'JB = JS'E + JES';$$

sostituendo questi valori nell' equazione precedente, ed osservando che

$$IS'L + JSL = SSS' \quad ; \quad ILS + JLS' = ILJ$$

$$IS'E + JS'E = SS'S' \quad ; \quad IES' + JES = AEB$$

si trova

$$2\pi - SS'S' - ILJ = SS'S' + AEB$$

Quando il punto L è a tale distanza che i raggi LI, LJ possano considerarsi come sensibilmente paralleli, l' angolo in L potrà supporsi nullo, e rimarrà

$$AEB = 2(\pi - SSS')$$

e quindi

$$AEC = \pi - SSS$$

cioè l' angolo AEC eguale al supplemento di quello fatto dagli specchii: che è la proposizione del testo.

NOTE ALLA LEZIONE XXIX.

Nota I.

Espressione generale della lunghezza degli accessi.

Già nell' articolo 2 della Lezione XXIV abbiamo fatto osservare che Newton determinava i confini dei colori nello spettro prismatico prendendo nna linea *M U*, fig. 20, eguale al doppio della lunghezza dello spettro, e tagliando su di essa delle parti proporzionali a

lim. *R*	*R A*	*A G*	*G V*	*V α*	*α I*	*I U*	lim. *U*
$\frac{1}{2}$,	$\frac{9}{16}$,	$\frac{3}{5}$,	$\frac{2}{3}$,	$\frac{3}{4}$,	$\frac{5}{6}$,	$\frac{8}{9}$,	1 :

o ciò che torna lo stesso, prendendo per nnità la lunghezza dello spettro e rappresentando quindi con 2 quelle della detta linea, tagliando su di esse le parti

lim. *R*	*R A*	*A G*	*G V*	*V α*	*α I*	*I U*	lim. *U*
1 ,	$\frac{9}{8}$,	$\frac{6}{5}$,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{4}{3}$,	$\frac{6}{5}$,	$\frac{16}{9}$,	2·

Ora Newton suppose che le lunghezze degli accessi nei limiti su accennati dei colori fossero in ragione inversa delle potenze sesquialtere di questi numeri, che fossero cioè nella proporzione dei numeri segnenti

lim. *R*	*R A*	*A G*	*G V*	*V α*	*α I*	*I U*	lim. *U*
$(1)^{\frac{2}{3}}$	$\left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{2}{3}}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2}{3}}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2}{3}}$	$\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{2}{3}}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Il Sig. Blanc notò nna particolarità di questi numeri la quale consiste in ciò che moltiplicando due di loro che sieno egualmente lontani dai due termini estremi della serie si ha costantemente per prodotto $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$. Se ora noi immaginiamo descritto il cerchio cromatico di Newton, (fig. 24) nel quale i limiti dei colori surriferiti corrispondono agli estremi degli archi

lim. *R*	*R A*	*A G*	*G V*	*V α*	*I α*	*I U*	*U*
0°. 00' ,	60°. 45',	94°. 56'',	149°. 37'',	210 . 23 ,	263°. 04',	299°. 15',	360°.00;

si vede che la somma di due qualunque di questi archi corrispondenti ai limiti di due colori egualmente lontani dagli estremi, è sempre costante

ed eguale a 360°, come il prodotto dei loro accessi è costante ed eguale ad $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$. Estendendo questa proprietà a tutti i punti intermedii, potremo dunque dire che gli archi nel cerchio cromatico di Newton sono proporzionali ai logaritmi delle lunghezze degli accessi che corrispondono ai colori situati nelle estremità degli archi medesimi, e quindi viceversa che le lunghezze λ di questi accessi sono proporzionali agli esponenziali, che si ha cioè

$$\lambda = 0^{mm},000161 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}\frac{\varphi}{2\pi}} = 0^{mm}000161 \ (0,6300)^{\frac{\varphi}{2\pi}};$$

$0^{mm},000161$ essendo la lunghezza degli accessi corrispondenti al limite rosso, ove $\varphi = 0$. Questa formola che gode della proprietà che il prodotto di due accessi corrispondenti agli archi φ e $2\pi - \varphi$, dà sempre il numero costante $0^{mm},000161 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, può esprimere la lunghezza degli accessi con una legge continua: pare che essa sia stata conosciuta da Newton, e fu tratta a nuova luce dal Sig. Blanc (1).

Nota II.

Calcolo dell' effetto dell' obliquità dei raggi nei fenomeni d' interferenza delle lamine sottili.

Quando l'incidenza è obliqua ed il piano dell'onda $O\Omega$, fig. 147 si trova inclinato alla faccia della lamina sottile, allora l' onda nel penetrare in essa, incontra successivamente i punti della prima superficie della lamina. Sia O' il punto di questa superficie in cui si rifrange quel raggio che riflesso in π sulla seconda superficie viene rifratto una seconda volta in p, ed acquista la stessa direzione del raggio $p\,E$ che è semplicemente riflesso, e col quale poi giunge unitamente all'occhio in E. I cammini percorsi da questi due raggi, partiti amendue dall' onda $O\,O'$ nello stesso periodo della loro fase, saranno $O\,p$ ed $O'\pi + \pi\,p$, e dividendo ciascuno di questi cammini per le rispettive lunghezze l' ed l delle ondulazioni nel mezzo incidente e nella lamina, la differenza dei quozienti darà la loro differenza di fase che sarà espressa da

$$\delta = \frac{O'\pi + \pi\,p}{l} - \frac{O\,p}{l'}$$

Ma chiamando i l' angolo d' incidenza, eguale ad $O\,O'p$, r l' angolo di rifrazione $\pi\,O'\Sigma$, e σ la grossezza $O'\Sigma$ della lamina si ha

(1) *Poscritto.* Le esperienze sugli spettri fatti coi reticoli di Fraunhofer mostrano che la legge data dalla suddetta formola non è rigorosa. Vedasi una Memoria recentemente pubblicata nel 1.° volume degli Annali delle Università Toscane.

$$O\,p = O'\,p \sin i = 2\,\sigma \,\text{tang}\, r \sin i \quad , \quad O'\,\pi + \pi\,p = \frac{2\,\sigma}{\cos r}$$

dunque osservando che

$$\sin i : \sin r :: l' : l,$$

sarà

$$\frac{O'\,\pi + \pi\,p}{l} - \frac{O\,p}{l'} = \frac{2\,\sigma}{l} \left(\frac{1}{\cos r} - \frac{\sin^2 r}{\cos r}\right) = \frac{2\,\sigma}{l} \cos r\,,$$

e perciò

$$\delta = \frac{2\,\sigma \cos r}{l}\,,$$

Così la differenza δ delle fasi, od il doppio delle parti proporzionali alle lunghezze degli accessi, che sotto l' incidenza perpendicolare era espressa da $\frac{2\,\sigma}{l}$, sarà sotto l' incidenza obliqua espressa come se la grossezza σ della lamina fosse ridotta a $\sigma \cos r$.

Si può confermare la verità di questa formola con alcuni esperimenti fatti de Newton che misurò i diametri degli anelli prodotti con diverse obliquità dei raggi incidenti. La tavola seguente offre i risultamenti di questi esperimenti.

ANGOLO d' incidenza sulla prima faccia della lamina d' aria	ANGOLO di riflessione sulla seconda faccia	DIAMETRO osservato dell' anello	GROSSEZZA della lamina d' aria interposta	VALORE numerico di $\frac{10}{\cos r} = \sigma$
00°. 00′	00°. 00′	10	10	10,00
06 . 26	10 . 00	10 . $\frac{1}{13}$	10 . $\frac{2}{14}$	10,15
12 . 45	20 . 00	10 . $\frac{1}{3}$	10 . $\frac{2}{3}$	10,64
18 . 49	30 . 00	10 . $\frac{3}{4}$	11 . $\frac{1}{2}$	11,55
24 . 30	40 . 00	11 . $\frac{2}{3}$	13 .	13,05
29 . 37	50 . 00	12 . $\frac{1}{2}$	15 . $\frac{1}{2}$	15,56
33 . 58	60 . 00	14 .	20 .	20,00
35 . 47	65 . 00	15 . $\frac{1}{4}$	23 . $\frac{1}{4}$	23,66
37 . 19	70 . 00	16 . $\frac{4}{5}$	28 . $\frac{1}{4}$	29,24
38 . 33	75 . 00	19 . $\frac{1}{4}$	37 .	37,32

Nella prima colonna sta l' angolo d' incidenza del raggio colorato che

cade sulla prima faccia della lamina d' aria; nella seconda l'angolo di rifrazione nel passaggio del medesimo dal vetro nell' aria, eguale a quello sotto cui è riflesso alla seconda faccia della lamina d' aria. Nella terza colonna sono le misure prese dei diametri degli anelli osservati, corrispondenti ad un medesimo colore rappresentando con 10 il diametro dell' anello che si vede coll' incidenza perpendicolare. Nella quarta sta il valore della lamina d' aria calcolata proporzionatmente al senoverso, od al quadrato del diametro dell' anello corrispondente, giusta la regola dell' articolo 1 di questa Lezione. Nell' ultima colonna si danno poi i valori del numero 10 che rappresenta la grossezza della lamina d' aria nell' incidenza perpendicolare, divisa pel coseno dell' angolo r, onde fare il confronto degli sperimenti colla teoria, confronto che risulta in favore di questa.

NOTE ALLA LEZIONE XXX.

Nota I.

Dimostrazione dell' equazione dell' ellissoide citata all' articolo 13.

Lo sferoide ellittico di cui si parla nel testo è un'ellissoide di rivoluzione generato dalla rotazione di un'elisse intorno al suo asse polare $2a$, l'altro asse $2b$ essendo l'asse equatoriale. I raggi o semidiametri dell'ellissoide che fanno costantemente un' angolo θ coll' asse polare $2a$, saranno quindi tutti eguali al raggio o semidiametro dell'elisse generatrice che faccia pure l' angolo θ col suo asse $2a$. Ora nella nota I della Lezione V, abbiamo dimostrato l' equazione (4) dell' elisse essere

$$y^2 = (1 - e^2)\ (a^2 - x^2)\ ;$$

quindi, osservando che nella citata Nota si è posto $a^2\ (1 - e^2) = b^2$, dividendo tutta questa equazione per b^2, alla medesima potremo dare la forma

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ora nel triangolo rettangolo $E\,I\,p$ della fig. 53 essendo

$$Ip = x \quad , \quad Ep = y \quad , \quad IE = r \quad , \quad pIE = \theta\ ;$$

si avrà

$$y = r \sin\theta \quad , \quad x = r\cos\theta\ ;$$

ponendo questi valori nell' equazione precedente, ed osservando che $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, si dedurrà

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)\sin^2\theta,$$

come nel testo.

Nota II.

Cristalli di doppia rifrazione con un solo asse ottico.

NOMI DEI CRISTALLI	VALORI DI $\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$
FORMA CRISTALLINA *Romboide con vertice ottuso*		
Carbonato di calce. M.	1,6543	1,4833
Carbonato di calce e piombo.	$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	negativo
Carbonato di calce e magnesia	detto	detto
Carbonato di zinco.	detto	detto
Nitrato di soda	detto	detto
Fosfato di piombo	detto	detto
Fosfato arseniato di piombo.	detto	detto
Tormalina. . . Br.	1,668 ?	detto
Rubellite . . He. Br.	1,77 ?	detto
Argento rosso	detto	detto
Allume di rocca	detto	detto
Dioptaso	$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	positivo
Quarzo. . . . Bi.	1,5479	1,5571
FORMA CRISTALLINA *Romboide con vertice acuto.*		
Corindon	$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	negativo
Zaffiro	detto	detto
Rubino . . . . Br.	1,779 ?	detto
Cinabro.	detto	detto
Arseniato di rame.	detto	detto
FORMA CRISTALLINA *Prisma esagonale regolare.*		
Smeraldo	$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	negativo
Berillo . . . . Bi.	1,598 ?	detto

NOMI DEI CRISTALLI	VALORI DI $\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$
Fosfato di calce.	1,598 ?	negativo
Nefelina	detto	detto
Arseniato di piombo.	detto	detto
Idrato di magnesia.	$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	positivo
FORMA CRISTALLINA *Ottaedro a base quadrata.*		
Zirconio . . . Br.	1,961	2,015
Ossido di stagno.	$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	positivo
Tungstato di calce.	1,970	2,129
Mellite . . . . Br.	1,556	1,538
Molibdato di piombo.	$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	negativo
Octoedrite.	detto	detto
Prussiato di potassa.	detto	detto
FORMA CRISTALLINA *Prisma a base quadrata*		
Titanite	$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	positivo
Idrocoasio.	$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	negativo
Wernerite.	detto	detto
Parantina	detto	detto
Meionite	detto	detto
Subfosfato di potassa.	detto	detto
Sopracetato di rame e calce	detto	detto
Fosfato d' ammoniaca e magnesia	detto	detto
Idrato di stronziana.	detto	detto
Arseniato di potassa.	detto	detto
Solfato di nichel e rame	detto	detto

NOMI DEI CRISTALLI	VALORI DI $\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$	POSIZIONE DELL' ASSE OTTICO
Forma cristallina non ancor bene determinata			
Mica di Kariat.	$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	negativo	Perpendicolare alle lamine.
Mica con amiante . . .	detto	detto	Detto.
Muriato di calce	detto	detto	Come nel prisma esagonale.
Muriato di stronziana . .	detto	detto	Detto.
Boracite	$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	positivo	Come nel romboide di 90°.
Apofilite sovracomposto .	detto	detto	Perpendicolare alla piastra.
Solfato di potassa. . . .	detto	detto	Come nel prisma esagonale.
Cianureto di mercurio . .	$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	negativo	Come nel prisma a base quadrata.

N. B. Le lettere majuscole M., Bl., Br. dinotano gli osservatori Malus, Sig. Biot, e Sir D. Brewster. Il punto? dopo un valor numerico nota che non è stato avvertito se fu il raggio ordinario e straordinario che diede il valor dell'indice osservato.

NOTE ALLA LEZIONE XXXI.

NOTA I.

Cristalli di doppia rifrazione con due assi ottici.

I valori degli indici di rifrazione dell' Aragonite, e del Topazzo incoloro sono stati determinati con ispecial cura dal Sig. Rubderg, e sono i dati più preziosi che abbiamo intorno alla rifrazione dei cristalli birifrangenti con due assi ottici, poichè ha determinato i valori particolari degli indici di refrazione per tutti i raggi prossimi alle strie dello spettro indicate da Fraunhofer colle lettere *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*.

	ARAGONITE				TOPAZZO INCOLORO			
	VALORI DI				VALORI DI			
	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{c}$	φ	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{c}$	φ
B	1,52749	1,67631	1,68061	—19°.44′	1,60840	1,61049	1,61791	+55°.50′
C	1,52820	1,67779	1,68203	19. 34	1,60935	1,61144	1,61880	
D	1,53013	1,68157	1,68589	19. 37	1,61161	1,61375	1,62109	56°.40′
E	1,53264	1,68634	1,69084	19. 54	1,61452	1,61668	1,62408	
F	1,53479	1,69053	1,69515	20. 01	1,61701	1,61914	1,62652	
G	1,53882	1,69836	1,70318	20. 13	1,62154	1,62365	1,63123	
H	1,54226	1,70509	1,71011	20. 59	1,62539	1,62745	1,63506	55°.00′

La lettera φ dinota l' angolo $< 90^{\circ}$ che fanno fra loro i due assi ottici calcolato colla formola $\tan \frac{1}{2} \varphi = \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Secondo che questi assi comprendono nell' angolo φ l' asse d' elasticità corrispondente all' indice $\frac{1}{a}$, o vero quello corrispondento all' indice $\frac{1}{c}$, il valore dell' angolo φ è indicato come positivo o negativo. Ed i cristalli sono distinti in positivi e negativi a norma del segno dello stesso angolo.

Sugli altri cristalli a due assi non abbiamo dati così precisi nè così completi come pei due precedenti: la tavola seguente contiene una gran parte di ciò che è conosciuto.

Cristalli con due assi ottici.

NOMI DEI CRISTALLI	VALORI DI		
	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{c}$	φ
Solfato di nichel .	—	—	+ 3°.00'
Carbonato di piombo	1,813	2,084	—10. 35
Carbonato di stront.	1,543	1,700	— 6, 56
Carbonato di barite.	1,540	—	—
Nitrato di potassa .	—	—	— 5. 20
Mica, alcune specie.	—	—	— 6. 00
Talco	—	—	— 7. 24
Madre perla . . .	1,053?	—	—11. 28
Idrato di barite . .	—	—	—13. 18
Mica, alcune specie.	—	—	—14. 00
Aragonite. Biot, e Br.	1,535	1,693	—18. 18
Crisoberillo . . .	1,760?	—	+27. 51
Anidrite	1,577	1,622	+28. 07
Mica di diverse specie esaminate dal Sig. Biot . . .	—	—	30. 00
	—	—	31. 00
	—	—	32. 00
	—	—	34. 00
	—	—	37. 00
Apotillite	—	—	35. 08
Solfato di magnesia.	1,465	1,488	—37. 24
Solfato di barite. B.	1,631	1,647	+37. 42
Borace nativo . .	1,701?	—	—38. 48
Stilbite.	1,508?	—	+41. 42
Solfato di nichel. .	—	—	+42. 04
Solfato di zinco . .	—	1,507	—44. 28
Anidrite . . Biot.	1,577	1,622	+44. 41
Mica	—	—	—45°.00
Lepidolite	—	—	— 45. 00
Benzoato d'ammon.	—	—	+45. 08
Solf. di magn. e soda	—	—	46. 49
Solfato d'ammoniaca.	—	—	+49. 42
Topazzo del Brasile.	1,632	1,640	+49. 30
Zucchero	1,554?	—	—50. 00
Solfato di strontiana.	1,644?	—	+50. 00

NOMI DEI CRISTALLI	VALORI DI		
	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{c}$	φ
Solfato d'ammoniaca e magnesia. . .	1,483?	—	+51. 22
Fosfato di soda . .	—	—	—55. 20
Comptonite . . .	1,553?	—	+56, 06
Solfato di calce . .	1,525?	—	+60. 00
Ossinitrato d'argento.	—	—	+52. 16
Dichroite	—	—	—62. 50
Felspato	1,764?	—	— 63. 00
Topazzo d'Aberdeen	—	—	+65. 06
Solfato di potassa .	1,502	—	+57. 00
Carbonato di soda .	—	—	— 70. 01
Acetato di piombo .	—	—	— 70. 25
Acido citrico. . .	—	—	+70. 29
Tartrato di potassa .	—	—	—71. 20
Acido tartarico . .	—	—	—79. 00
Tartr. di pot. e soda	1,515?	—	+80. 00
Carbonato di potassa.	1,482?	—	—80°.30?
Cianite	—	—	+81. 48
Clorato di potassa .	—	—	82. 00
Epidote.	1,661	1,703	84. 29?
Muriato di rame. .	—	—	84. 30?
Peridot, crisolite .	1,660	1,685	87. 56?
Sali cr. di Cheltenham	—	—	88. 14?
Acido succin. all'inc.	—	—	90°.00
Solf. di ferro all'incir.	—	—	90. 00
Iposolf. di soda ed ar.	1,735	1,785	—
Iposolf. di strontiana	1,608	1,651	—
Iposolfite di calce .	1,583	1,628	—
Solfato di rame . .	1,531	1,552	—
Euclaso	1,043	1,663	+
Mesotipo	1,516	1,522	—
Nitro	1,335	1,514	
Nitrato d' argento .	1,729	1,788	—
Cromato di piombo.	2,500	2,974	—

Nei libri francesi si dà il nome di linea *intermediaria* a quella che divide per metà l'angolo, $\varphi < 90^0$ fatto dagli assi ottici; e di linea *supplementaria* a quella che le è perpendicolare: queste due linee essendo situate nel piano della sezione principale media. I valori $\frac{1}{a}$ ed $\frac{1}{c}$ sono distinti coi nomi di indice di rifrazione ordinaria, e di rifrazione straordinaria; intendendo per rifrazione ordinaria quella del raggio che si rifrange nel piano perpendicolare alla linea supplementaria. Se il semiasse a della massa d'elasticità è in questo piano, l'indice ordinario è minore dello straordinario, e l'angolo φ è positivo; se per lo contrario il semiasse c della minima elasticità è nel detto piano, l'indice ordinario è maggiore dello straordinario, e l'angolo φ, si considera negativo

Quando gli indici massimo e minimo $\frac{1}{c}$ ed $\frac{1}{a}$ e l'angolo φ sono conosciuti per un cristallo, si può dedurre il valore dell'indice medio $\frac{1}{b}$ dalla formola

$$\frac{1}{b^2} = \frac{1}{a^2} \cos^2\varphi + \frac{1}{c^2} \sin^2\varphi$$

la quale risulta dalla formola (4) che sarà dimostrata nella Nota III di questa Lezione

Nota II.

Sulla costruzione della superficie fluente.

Possiamo farci un concetto della forma della superficie fluente, o, come Fresnel la chiamò, della superficie dell'onda, col processo seguente che può somministrare un mezzo di descriverla per punti a quelli che già fossero iniziati nei principii della Geometria descrittiva.

Intorno al punto, dove il tremito è generato, come centro, immaginasi descritto un elissoide i cui semiassi siano paralleli ai tre semiassi, detti da Fresnel, di elasticità, e le cui lunghezze siano eguali alle velocità di propagazione della luce nelle direzioni degli stessi assi, cioè alle velocità che nel testo sono state rappresentate con a, b, c. (1)

(1) Per avere un'idea della generazione del solido che i geometri chiamano un'ellissoide, si possono supporre tracciate su due piani perpendicolari fra loro, due ellissi il cui centro ed il cui asse $2a$ siano comuni e situati nell'intersezione dei due piani, ed il secondo asse di quella che giace nel primo piano, che supporremo orizzontale, sia $2b$, e di quella che è nell'altro piano verticale sia $2c$. Il piano contenente l'ellisse (a, c) divenuto mobile scorra parallelamente a se stesso nella direzione del semiasse b, e durante questo movimento l'ellisse (a, c), conservandosi sempre simile a se stessa, vada però impiccolendosi in modo che il suo asse $2a$ si riduca sempre eguale alla parte della linea d'intersezione dei due piani che viene compresa dall'el-

Tracciata dal centro una retta in una direzione qualunque, propongasi di determinare i punti della superficie fluente che sono situati su questa retta. Per ciò conducasi pel centro un piano perpendicolare alla retta medesima: questo piano taglierà l'ellissoide, e la sezione sarà un'elisse. Prendansi ora due lunghezze rispettivamente eguali al semiasse maggiore ed al semiasse minore della stessa elisse, e partendo dal centro applichinsi queste lunghezze sulla retta tracciata, le loro estremità segneranno due punti pei quali passa la superficie fluente, e questi due punti saranno i soli che corrispondono alla superficie fluente da quella parte nella direzione della retta tracciata.

Ripetendo per ciascuna direzione data alla retta la stessa costruzione si avrebbero altrettante coppie di punti della superficie fluente, e questa superficie si troverebbe così descritta per punti.

Nelle varie posizioni che può prendere il piano secante ve ne sono due passanti per l'asse medio b e simmetriche rispetto a ciascuno degli altri due assi, per le quali la sezione dell'ellissoide diviene un circolo. In questi due casi i due semiassi dell'elisse diventano eguali ed i due punti della superficie fluente costrutti sulle perpendicolari ai detti piani vengono a coincidere ed a confondersi in uno: queste perpendicolari segnano le direzioni dei due assi ottici del cristallo.

Nota III.

Dimostrazioni delle espressioni delle tangenti degli angoli che gli assi conici, e gli assi ottici fanno col semiasse della più grande elasticità.

1. Per dedurre il valore della tangente dell'angolo che l'asse conico CKC fa col grand'asse $A'A$, fig. 61 e 148, conducansi dai fuochi F ed F' dell'elisse cc' i raggi vettori Fc ed $F'c$; nei due triangoli FcT, $F'cT$, la proporzionalità dei lati ai seni degli angoli opposti ci darà le equazioni

$$Fc \sin FcT = FT \sin T \quad ; \quad F'c \sin F'c\,T = F'T \sin T.$$

Ma, secondo ciò che abbiamo dimostrato nel n.° 3 della Nota I alla Lezione V, i raggi vettori Fc, ed $F'c$ fanno angoli equali colla tangente TT', e si ha cioè $FcT = F'cT$, e quindi

$$F'c\,T = \pi - FcT \quad , \quad \sin F'c\,T = \sin FcT;$$

così, ponendo per brevità $FcT = \theta$, facendo la somma delle due precedenti equazioni, ed osservando che per la natura dell'elisse

lisse immobile (a, b). Il solido generato dall'ellisse mobile durante questo movimento è la metà dell'ellissoide, i cui semiassi sono a, b, c. L'altra metà dell'ellissoide esattamente eguale alla prima si otterrebbe facendo scorrere il piano lungo il semiasse opposto b.

$$F c + F' c = 2 a \quad ; \quad F T + F' T = 2 K T,$$

si avrà

$$a \sin \theta = K T' \sin T.$$

Nel triangolo rettangolo $K C T$ il prodotto $K T$ sin T eguaglia il cateto $K C$, o sia il raggio b del circolo $C C'$, la precedente equazione darà perciò

$$(1) \qquad a \sin \theta = b.$$

Dai fuochi F ed F' dell'elisse, i cui semiassi sono a e c si abbassino sulla tangente $T T'$ le perpendicolari $F f$, $F' f$, sarà

$$F c \cos \theta = c f \quad ; \quad F' c \cos \theta = c f'$$

e quindi sommando le due equazioni avremo

$$2 a \cos \theta = c f + c f'.$$

Ma, condotta $F g$ perpendicolare ad $F' f'$ è facile di vedere che è

$$c f + c f' = F g = F F' \cos T = 2 \sqrt{a^2 - c^2} \cos T;$$

così potremo ridurre l'ultima equazione a

$$(2) \qquad a \cos \theta = \sqrt{a^2 - c^2} \cos T.$$

Sommando il quadrato di quest'equazione col quadrato della precedente (1) dedurremo

$$a^2 - b^2 = (a^2 - c^2) \cos^2 T$$

o vero sostituendo $1 - \sin^2 T$ a $\cos^2 T$,

$$b^2 - c^2 = (a^2 - c^2) \sin^2 T;$$

da queste due equazioni si ricava

$$\cos T = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}} \quad , \quad \sin T = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}$$

e quindi dividendo una per l'altra

$$(3) \qquad \cos T = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{b^2 - c^2}} = \tan C K T.$$

2. L'espressione della tangente dell'angolo che l'asse ottico $K O$, fig. 61, e 149, fa col semiasse $K A$ si deduce più facilmente. Infatti elevando dal punto O la perpendicolare $O p$, al grand'asse $A A'$, e chiamando Ω l'angolo cercato $O K A$; nel triangolo rettangolo $O k p$ la cui ipotenusa $K O$ eguaglia il raggio b del circolo $O B O'$ si avrà

$$K p = b \cos \Omega = x \quad ; \quad O p = b \sin \Omega = y.$$

Ma considerando Kp ed Op come l'ascisse x e l'ordinata y del punto O dell'elisse, e sostituendo i loro valori nell'equazione (1), trovata nella Nota I della Lezione precedente in cui siasi cambiata la b, che in quella rappresenta il semiasse minore, nella c che lo rappresenta minore, nel caso presente si ha

$$\frac{b^2 \cos^2 \Omega}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2 \Omega}{c^2} = 1 \quad , \quad \text{o vero} \quad \frac{\cos^2 \Omega}{a^2} + \frac{\sin^2 \Omega}{c^2} = \frac{1}{b^2}.$$

Quindi eliminando da quest'equazione prima $\cos^2 \Omega$ e poi $\sin^2 \Omega$, col mezzo della formola $\sin^2 \Omega + \cos^2 \Omega = 1$, si dedurrà

$$\sin^2 \Omega = \frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}} \quad ; \quad \cos^2 \Omega = \frac{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}}$$

e dividendo una per l'altra queste due equazioni sarà anche

$$(4) \qquad \tan^2 \Omega = \frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}}$$

o se si vuole

$$(5) \qquad \tan \Omega = \frac{c\sqrt{a^2 - b^2}}{a\sqrt{b^2 - c^2}}$$

come nel testo.

NOTE ALLA LEZIONE XXXII.

Nota I.

Sulla proprietà che i due raggi polarizzati in piani opposti, provenienti dalla decomposizione di un raggio di luce comune, sono tali che condotte due loro porzioni eguali ad uno stesso piano di polarizzazione, queste non sono atte ad interferire.

1. Se si considera la rapida agitazione che deve commuovere le molecole di un corpo nello stato luminoso si comprende tosto che dai movimenti vibratorii di tutte quelle molecole devòno eccitarsi nell'etere un numero straordinariamente grande d'onde polarizzate in piani diversi, e diffondentisi in tutte le direzioni nello spazio. A brevissimi intervalli di tempo un gran numero di sistemi cesseranno, altri cominceranno a sussistere, e si sostituiranno ai primi (1). Dalla sovrapposizione e successione di tutti questi sistemi d'onde sarà composta la luce naturale. Un raggio di luce naturale dovrà dunque considerarsi come formato dal concorso d'un numero presso che infinito di sistemi d'onde differenti fra loro di lunghezza, d'intensità, di fase, polarizzati in piani diversi, che succedendosi gli uni agli altri, fanno sì che la composizione del raggio varii ad intervalli impercettibili di tempo. In un istante prevaleranno i sistemi che tendono a trasportare gli atomi d'etere in una direzione, nell'istante seguente quelli che tenderanno a trasportarli in altra. Questa prevalenza è necessaria onde i movimenti vibratorii non si neutralizzino costantemente, ma in un tempo brevissimo ed ancora impercettibile molti sistemi avranno dominato in tutte le direzioni possibili.

2. Consideriamo fra tutti i sistemi d'onde componenti un raggio di luce naturale quelli nei quali le onde sono d'eguale lunghezza, e che potrebbero essere atti ad interferire fra loro. Siano i, i', i'' ec. le velocità massime di vibrazione dei singoli sistemi; f, f', f'' ec. le fasi corrispondenti ed a, a', a'' ec. gli azimut dei loro piani di polarizzazione. Le vibrazioni di tutti questi sistemi potranno concepirsi decomposte secondo due piani reciprocamente perpendicolari. Le componenti parallele al piano dal quale si contano gli azimut potranno ricomporsi in una sola vibrazione risultante, la cui velocità massima e fase si otterranno, giusta la regola dell'articolo 9, sostituendo $i\cos a$, $i'\cos a'$, $i''\cos a''$ nelle due ultime formole generali della Nota I della Lezione XXVI, ed indicandole con I_p e φ_p si avrà

$$(1)\qquad I_p^2 = \left(\Sigma\, i\cos a\cos 2\pi\frac{f}{\lambda}\right)^2 + \left(\Sigma\, i\cos a\sin 2\pi\frac{f}{\lambda}\right)^2;$$

$$(1)_p\qquad \tang 2\pi\frac{\varphi_p}{\lambda} = \frac{\Sigma\, i\cos a\sin 2\pi\frac{f}{\lambda}}{\Sigma\, i\cos a\cos 2\pi\frac{f}{\lambda}}.$$

(1) Per aver presente alla mente la celerità con cui queste variazioni possono succedere, giova rammentarsi quanto vien detto nella Nota posta al piè della pag. 68.

Sviluppando i quadrati, alla prima di queste formole si può dare la forma,

$$(2)_p \qquad I_p^2 = \Sigma\, i^2 \cos^2 a + 2\,\Sigma\, i\, i' \cos a \cos a' \cos 2\pi \frac{f-f'}{\lambda}.$$

Con questi parametri I_p e φ_p, la vibrazione risultante sarà espressa da

$$(3)_p \qquad I_p \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\varphi_p}{\lambda}\right).$$

Le stesse formole possono servire a darci la risultante di tutte le vibrazioni componenti perpendicolari al piano precedente: perciò non si avrà che a cambiare in esse $\cos a$, e $\cos a'$ in $\sin a$ e $\sin a'$; dinotando quindi con I_q e φ_q la velocità massima e la fase, avremo

$$(1)_q \qquad \tang 2\pi \frac{\varphi_q}{\lambda} = \frac{\Sigma\, i \sin a \sin 2\pi \frac{f}{\lambda}}{\Sigma\, i \sin a \cos 2\pi \frac{f}{\lambda}},$$

$$(2)_q \qquad I_q^2 = \Sigma\, i^2 \sin^2 a + 2\,\Sigma\, i\, i' \sin a \sin a' \cos 2\pi \frac{f-f'}{\lambda};$$

e la vibrazione risultante sarà data dalla formola

$$(3)_q \qquad I_q \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\varphi_q}{\lambda}\right).$$

3. I valori di I_p, φ_p ed I_q, φ_q che abbiamo ottenuti appartengono ad un dato istante. Per causa della rapida variazione a cui va soggetta la composizione di un raggio di luce comune, questi valori cambiano a brevissimi intervalli di tempo. Siccome sembrano due condizioni della sensibilità dell'occhio quella di esigere un certo numero di vibrazioni onde l'impressione sia percepita, e quella di conservare la percezione qualche istante dopo che l'impressione è cessata, l'intensità della luce, proporzionale nei rispettivi raggi al quadrato di I_p^2 ad I_q^2, dovrà valutarsi colla somma dei valori che queste quantità ricevono durante un tempo, corto bensì, ma che comprenderà nulla di meno un grandissimo numero di variazioni avvenute nella costituzione del raggio. Ora se facciamo la somma di un numero assai grande di valori di I_p^2 ed I_q^2, i primi termini delle loro espressioni, essendo dei quadrati positivi, daranno delle somme successivamente crescenti, ma i secondi termini, variando di valore e di segno in tutti i modi possibili a seconda della prevalenza dei sistemi in una direzione o nell'altra, produrranno delle somme che constando di parti presso che eguali e di segno contrario saranno sensibilmente nulle, e si avrà

$$\Sigma\, I_p^2 = \Sigma\,\Sigma\, i^2 \cos^2 a \qquad ; \qquad \Sigma\, I_q^2 = \Sigma\,\Sigma\, i^2 \sin^2 a.$$

Per le stesse ragioni, o sia perchè in un brevissimo tempo domineranno dei sistemi in tutti gli azimut possibili dovrà essere

$$\Sigma\,\Sigma\, i \cos^2 a = \Sigma\,\Sigma\, i^2 \sin^2 a \quad \text{, e perciò} \quad \Sigma\, I_p^2 = \Sigma\, I_q^2.$$

Se quindi si osserva che sommando le due premesse equazioni si ha anche

$$\Sigma\, I_p^2 + \Sigma\, I_q^2 = \Sigma\,\Sigma\, i^2,$$

da questa e dalla precedente si dedurrà

$$\Sigma\, I_p^2 = \Sigma\, I_q^2 = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,\Sigma\, i^2.$$

Il simbolo $\Sigma\Sigma\, i^2$ dinota la somma de' quadrati di tutte le velocità massime delle singole vibrazioni del raggio incidente esistite in un tempo percettibile, la qual somma è proporzionale all' intensità di luce dello stesso raggio, e $\Sigma\, I_p^2$, $\Sigma\, I_q^2$ sono nello stesso tempo proporzionali alle intensità dei raggi componenti $(3)_p$ e $(3)_q$; l' equazione trovata ci dice dunque che un raggio di luce comune potrà sempre considerarsi come composto, o pure potrà sempre scomporsi in due raggi d' intensità sensibilmente eguali alla metà, polarizzati in piani opposti.

4. Quantunque i valori di I_p, φ_p ed I_p, φ_q debbano essere risguardati come variabili rapidamente, fa però d'uopo considerarli costanti per un certo numero di vibrazioni. Una tale condizione è richiesta dall' apparizione delle frange di Grimaldi, e degli anelli di Newton che si producono anche colla luce comune. Questi fenomeni, come abbiamo esposto, dipendono dall' interferenza di due porzioni di luce separate da uno stesso raggio, le quali venendo a passare per un medesimo punto dello spazio dopo aver percorsi dei cammini diversi si rinvigoriscono od ammorzano, secondo che, per la differenza dei loro cammini, giungono al detto punto in concordanza o discordanza. Affinchè l' interferenza succeda bisogna che si verifichino due circostanze. 1.mo Essa deve effettuarsi separatamente per ciascuno dei due raggi in cui può concepirsi scomposto il raggio incidente di luce comune, perchè le vibrazioni $(3)_p$, $(3)_q$ essendo ad angolo retto non potrebbero alterare reciprocamente la loro forza viva od intensità di luce. 2.do Onde la porzione di raggio, che giunge dopo al punto d' incontro, interferisca effettivamente colla prima, a quegli intervalli che l' esperienza ci indica, bisogna che ritrovi questa mentre eseguisce ancora la stessa specie di vibrazioni di quando si sono separate. Quest' incontro di vibrazioni non è in vero possibile immediatamente dopo succeduto un cambiamento nella costituzione del raggio incidente, perchè le nuove ondulazioni della seconda porzione non possono arrivare a riunirsi a quelle della prima se non dopo il lasso di tempo che è loro necessario per correre la differenza di cammino, ma se questo tempo è assai corto, rispetto a quello in cui le ondulazioni continuano in seguito a passare assieme per lo stesso punto, l' interferenza potrà ancora aversi per continua. Per persuaderci di ciò, cominceremo dall' osservare che l' esperienza ci mostra che non si saprebbe produrre una serie di frange in numero maggiore di 50 o 60; poniamo per abbondare 100. La seconda porzione di raggio che colle sue interferenze produce la centesima frangia arriverà al punto d' incontro colla prima dopo un tempo eguale a quello in cui la luce fa 100 ondulazioni; un tal tempo è brevissimo, e non eccederebbe 0,0000002 di milionesimo di secondo. Sì poche vibrazioni in un tempo tanto breve sarebbero incapaci di destare la sensazione della luce ove per effetto d' interferenze già regnasse l' oscurità. Supponiamo ora

che il raggio incidente, e quindi le due sue porzioni continuino a vibrare uniformemente per 20000 vibrazioni queste due porzioni verrebbero a stare riunite nel punto d'incontro per un tempo 198 volte maggiore di quello in cui furono separate, e questo periodo di tempo non durerebbe ancora che 0,000000001 di secondo. Il tempo che l'occhio richiede per percepire la luce e per valutarne l'intensità contiene probabilmente un grandissimo numero di questi periodi, e come l'interferenza dura in ciascun periodo quasi l'intero tempo, e la breve interruzione, successiva all'istante in cui succede un cambiamento nella costituzione del raggio, non è bastante ad eccitare sensazione, il fenomeno apparirà come se l'interferenza fosse continua, ed identica.

5. Tornando a considerare i due raggi componenti e polarizzati, supponiamo che essi siano stati in realtà prodotti decomponendo il raggio incidente per mezzo di una lamina birifrangente, e che ciascuno dei due raggi sia stato di nuovo decomposto con una seconda lamina birifrangente, la cui sezione principale faccia un'angolo di 45° con quella della prima. Osservando che $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ le componenti delle vibrazioni dei due raggi nel piano parallelo alla sezione principale della seconda lamina saranno espresse da

$$(4)\qquad \frac{1}{\sqrt{2}} I_p \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi_p}{\lambda}\right) \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{2}} I_q \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi_q}{\lambda}\right).$$

Quando queste due porzioni venissero ad incontrarsi in uno stesso punto dello spazio avendo percorso due cammini diversi, la cui differenza fosse x, la velocità degli atomi nel punto d'incontro prodotta dalla sovrapposizione delle due velocità parziali sarà data da

$$(5)\qquad \frac{1}{\sqrt{2}} I_p \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi_p}{\lambda}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} I_q \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi_q + x}{\lambda}\right)$$

così che la velocità risultante e la fase corrispondente si otterranno, come all'articolo 4 della Lez. XXVI, colle formole

$$I \cos 2\pi\frac{\Phi}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_p \cos 2\pi\frac{\varphi_p}{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{2}} I_q \cos 2\pi\frac{\varphi_q + x}{\lambda}$$

$$I \sin 2\pi\frac{\Phi}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_p \sin 2\pi\frac{\varphi_p}{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{2}} I_q \sin 2\pi\frac{\varphi_q + x}{\lambda}.$$

Nel punto dove vi fosse interferenza completa od oscurità dovrebbe essere $I = 0$, e quindi i due secondi membri delle due precedenti equazioni dovrebbero annullarsi. Facendoli nulli, è facile, col moltiplicarli alternativamente per $\sin 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}$ e $\cos 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}$ e col prenderne la somma o le differenze, di trasformarli come segue

$$I_q \sin 2\pi\frac{\varphi_q + x - \varphi_p}{\lambda} = 0 \quad ; \quad I_p + I_q \cos 2\pi\frac{\varphi_q + x - \varphi_p}{\lambda} = 0.$$

Equazioni che non possono essere verificate, quando I_p ed I_q sono positivi come devono essere, a meno che non sia

$$I_p = I_q \quad ; \quad x = \frac{2n+1}{2}\lambda + \varphi_p - \varphi_p$$

n essendo un numero intero.

Come I_p ed I_q non possono essere costantemente eguali, ed i valori di φ_p e φ_q sono variabili molte migliaia di volte nel breve tempo che l'occhio percepisce la luce; i punti corrispondenti ai valori di x saranno alternativamente illuminati ed oscuri un gran numero di volte in questo frattempo, e l'occhio non potrà scorgere in essi oscurità od interferenza nessuna.

6. Lo stesso non succederebbe se il raggio incidente fosse un raggio di luce polarizzata. Rappresentando con I e φ' la velocità massima e la fase di questo raggio, decomponendolo, esso darebbe due raggi polarizzati negli azimut di 45° da una parte e dall'altra del suo piano di polarizzazione, le velocità dei quali sarebbero espresse da

$$(3)' \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} I \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi'}{\lambda}\right) \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{2}} I \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi'}{\lambda}\right)$$

che corrispondono alle due segnate (3) precedentemente.

Decomponendo nuovamente la velocità di questi raggi in due piani posti a 45° di azimut da un lato e l'altro dei loro rispettivi piani di polarizzazione, e prendendo le componenti che stanno fra mezzo ai medesimi, queste saranno date da

$$(4)' \qquad \tfrac{1}{2} I \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi'}{\lambda}\right) \quad \text{ed} \quad \tfrac{1}{2} I \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi'}{\lambda}\right)$$

analoghe alle (4); e queste espressioni rappresentano le vibrazioni degli atomi delle due porzioni di raggi ricondotte al piano di polarizzazione di prima.

Queste due porzioni avendo percorso due cammini diversi con una differenza di lunghezza egoale ad x recheranno agli atomi del loro punto di concorso delle velocità, che sovraposte daranno

$$(5)' \qquad \tfrac{1}{2} I \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi'}{\lambda}\right) + \tfrac{1}{2} I \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi' + x}{\lambda}\right);$$

formola che corrisponde alla (5).

Le velocità degli atomi nel punto d'incontro si troveranno, col processo seguito precedentemente, essere costantemente nulla, se sarà

$$\frac{\varphi' + x}{\lambda} = \frac{\varphi'}{\lambda} + \frac{2n+1}{2}$$

o sia riducendo, se sarà

$$x = n\lambda + \tfrac{1}{2}\lambda,$$

cioè tutte le volte che la differenza di cammino eguaglierà un numero dispari di semi-ondulazioni, vi sarà interferenza completa, che è ciò che conferma l'esperienza. Si è infatti veduto che un raggio polarizzato decomposto in due con una lamina birifrangente, e poi ciascuno

di questi decomposto con una seconda lamina in due nuove porzioni, le vibrazioni di due delle quali vengano ad essere in uno stesso piano, queste porzioni interferiscono fra loro, il che non succede con un raggio di luce naturale, per la ragione che abbiamo addotto sopra, che la differenza di fase delle stesse porzioni è continuamente variabile.

7. Se in luogo di considerare le due porzioni polarizzate nel piano interno che divide per metà l'angolo fatto dai piani di polarizzazione dei due raggi in cui fu decomposto il raggio incidente, si volessero considerare le due porzioni polarizzate nel piano esterno o perpendicolare al primo, il processo sarebbe simile. In questo caso le velocità delle vibrazioni componenti le due porzioni si otterrebbero pure moltiplicando quelle delle vibrazioni dei raggi rispettivi, segnate (3)', pei coseni degli angoli che i piani di queste vibrazioni fanno col piano suddetto. Siccome contando gli angoli da una stessa parte di questo piano, mentre le vibrazioni di un raggio farebbero un'angolo di 45°, quelle dell'altro ne farebbero uno di 135°, fig. 80, i coseni de' quali sono rispettivamente dati da $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, così le velocità componenti le due porzioni saranno di segno contrario, o di direzione opposta, e quella che proviene dalla loro sovrapposizione sarà data da

$$\tfrac{1}{2}\, I \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{\varphi'}{\lambda}\right)-\tfrac{1}{2}\, I \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{\varphi'+x}{\lambda}\right);$$

e questa velocità potrà risultare costantemente nulla, se il punto d'incontro è tale, che la differenza di cammino x soddisfaccia all'equazione

$$\frac{\varphi'+x}{\lambda}=\frac{\varphi'}{\lambda}+n,$$

n essendo un numero intero.

Da quest'equazione si deduce

$$x = n\lambda;$$

cioè l'interferenza succede nei punti in cui la differenza di cammino eguaglia un numero intero di ondulazioni. Anche questo risultamento è confermato dagli esperimenti di Fresnel e del Sig. Arago che hanno osservato che queste due porzioni di luce interferendo danno una linea nera nel mezzo, poi due frange luminose, poi due altre linee oscure ec.; le frange e le linee essendo situate inversamente di quando si fanno interferire le due porzioni di raggi considerate prima, nel qual caso si osserva una frangia luminosa nel mezzo, poi due linee nere, poi due frange luminose, così di seguito, vedasi l'articolo 4 della Lezione XXXV. La ragione di ciò si scorge dall'osservare che le porzioni considerate prima, interferiscono negli intervalli corrispondenti alle differenze di cammino λ, 3λ, 5λ ec., mentre quelle considerate dopo, interferiscono negli intervalli intermedii corrispondenti alle differenze di cammino 0, 2λ, 4λ ec.

NOTE ALLA LEZIONE XXXIII.

Nota I.

Del modo con cui si può concepire che succeda la propagazione delle vibrazioni trasversali in un mezzo elastico.

Fresnel per darsi ragione del modo con cui nell'etere, considerato come un sistema d'atomi in uno stato d'equilibrio stabile, possono esistere dei movimenti vibratorii perpendicolari alla direzione con cui questi movimenti si propagano, come i fenomeni della luce polarizzata richiedono, ha immaginato il seguente caso (1).

« Abbiasi un sistema d'atomi disposti regolarmente come sono rap« presentati nella fig. 150, e considerisi il caso di un'onda piana in« definita la cui superficie sia parallela al piano projettato secondo AB. « Se la parte del mezzo superiore a questo piano ha provato un piccolo « spostamento parallelo alla fila delle molecole AMB, queste molecole « si troveranno sollecitate a prendere un movimento simile. Infatti « consideriamo una di esse in particolare, la molecola M per esempio, « ed esaminiamo quale cangiamento sia avvenuto nelle azioni esercitate « sovr'essa dalla parte superiore del mezzo. Prima di tutto faccio osser« vare che le dette azioni saranno le stesse come se la molecola M si « fosse essa medesima rimossa di una quantità eguale e nella stessa di« rezione, la parte superiore del mezzo restando immobile. Suppongasi « dunque che M si sia traslocata nella direzione AB d'una piccolissima « quantità Mm. Le molecole E ed F, per esempio, situate ad eguale « distanza da M e dalla perpendicolare MG elevate sopra AB agivano « egualmente sulla molecola M nella direzione MA, e nella direzione « MB prima del suo traslocamento, vale a dire, che le componenti « delle loro azioni secondo AB si distruggevano mutualmente, mentre « che le componenti perpendicolari s'aggiungevano, ma erano bilanciate « dalle azioni contrarie delle molecole E' ed F', situate al disotto di « AB. Quandu il punto materiale M è trasportato in m, le componenti « parallele ad AB delle due azioni esercitate su di essa dalle molecole « E ed F non saranno più generalmente eguali fra loro, ed i piccoli « cangiamenti che esse hanno provato agiscono nel medesimo verso, e « tendono a ricondurre il punto m nella sua posizione primitiva M, se « questa corrispondeva ad un equilibrio stabile. »

Infatti rappresentiamo con φ la forza eguale che opera fra la molecola M e l'una o l'altra delle due molecole E ed F poste alla

(1) Mémoire sur la double réfraction. Academie des Sciences. 1827.

stessa distanza da esse (1). Se decomponiamo queste furze in due, e dai punti E ed F abbassiamo due perpendicolari Ep ed Fq sopra AB, le componenti parallele ad AB saranno espresse da

$$\varphi \cos EMp = \varphi \frac{Mp}{ME} \quad ; \quad \varphi \cos FMq = \varphi \frac{Mq}{MF};$$

e quelle parallele ad MD da

$$\varphi \sin EMp = \varphi \frac{Ep}{ME} \quad ; \quad \varphi \sin FMr = \varphi \frac{Fq}{MF}.$$

Le distanze ME, Mp, Ep essendo respettivamente eguali a MF, Mq, Fq, le due prime componenti parallele ad AB, saranno eguali, e come sono opposte manterranno la molecola M in equilibrio: le seconde componenti parallele a MC saranno pure eguali, ma esse saranno invece cospiranti, e la loro risultante sarà, come si è detto sopra, bilanciata dalle azioni contrarie ed eguali delle due molecole E', F'.

Quando la molecola M passerà in m, le distanze Ep ed Fp rimarranno ancora eguali, ma Mp si cangerà in $Mr + Mm$, ed Mq in $Mq - Mm$. Anche i quozienti $\frac{\varphi}{ME}$ e $\frac{\varphi}{MF}$ verranno a variare, perchè tanto φ che ME ed MF variano col variare le distanze reciproche delle molecole. Dinoteremo con $\Delta \frac{\varphi}{ME}$ e $\Delta \frac{\varphi}{MF}$ le variazioni di questi quozienti, ma come lo spostamento Mm è supposto molto piccolo supporremo che le loro variazioni siano proporzionali ad Mm. Così immaginando dai punti E ed F come centri descritti due archi Mr, Ms, di modo che i latercoli Ms dinotino le variazioni delle distanze ME ed MF, porremo

$$\Delta \frac{\varphi}{ME} = -a \,.\, mr \quad ; \quad \Delta \frac{\varphi}{MF} = a \,.\, Ms;$$

a essendo il coefficiente costante, il cui valore non importa in questo caso di conoscere, che rende le variazioni delle quantità $\frac{\varphi}{ME}$, o vero $\frac{\varphi}{MF}$ proporzionali ad mr, ed Ms.

Ho dato il segno — alla variazione del primo quoziente, perchè, l'etere essendo supposto in uno stato elastico, gli atomi tendono a respingersi reciprocamente, e le ripulsioni diminuiscono coll'allontanarsi degli atomi.

Lo spostamento Mm essendo estremamente piccolo in confronto di

(1) Siamo obbligati ad introdurre il seguente cangiamento nella citazione del passo di Fresnel, che citiamo, per evitare le espressioni differenziali delle quali egli fece uso.

ME od MF potremo considerare i triangoli Mmr Mms, come rettilinei e simili ai triangoli MEp, MFq e quindi si avrà

$$mr = \frac{Mp}{ME} \cdot Mm \quad , \quad Ms = \frac{Mq}{MF} \cdot Mm;$$

per cui risulterà

$$\Delta \frac{\varphi}{ME} = -a \frac{Mp}{ME} \cdot Mm \quad ; \quad \Delta \frac{\varphi}{MF} = a \frac{Mq}{MF} \cdot Mm.$$

Impiegando le variazioni di questa quantità, e quelle di Mp ed Mq menzionate sopra, e trascurando i termini che resulterebbero moltiplicati pel quadrato di Mm, come troppo piccoli; le variazioni delle due componenti parallele ad MD diverranno

$$-a \cdot \frac{Mp}{ME} \cdot \frac{Ep}{ME} \cdot Mm \quad ; \quad a \frac{Mq}{MF} \cdot \frac{Fq}{MF} Mm$$

e quelle delle componenti parallele ad AB

$$\varphi \frac{Mm}{ME} - a \frac{\overline{Mp}^2}{\overline{MF}^2} \cdot Mm \quad ; \quad -\varphi \frac{Mm}{MF} + a \frac{\overline{Mq}^2}{\overline{MF}^2} \cdot Mm.$$

Le variazioni delle due prime componenti che sono cospiranti ed aggiungono i loro effetti, essendo eguali e contrarie danno una somma nulla: la risultante delle forze perpendicolari ad AB non ha dunque cambiato per lo spostamento di M, e questa risultante continuerà ad essere bilanciata dalle ripulsioni opposte delle due molecole E' ed F'. Non così avverrà rispetto alle variazioni delle componenti parallele ad AB; queste componenti agendo in direzione contraria, la loro risultante sarà data dalla loro differenza, e nascerà quindi per questa risultante una variazione eguale a

$$2\left(\frac{\varphi}{ME} - a \frac{\overline{Mp}^2}{\overline{MF}^2}\right) Mm,$$

che tenderà a ricondurre il punto verso la sua situazione d'equilibrio stabile. « Per conseguenza se il punto M restando fisso, si trasloca un « poco la parte superiore del mezzo parallelamente ad AB (ciò che « torna lo stesso) il punto M sarà spinto secondo la direzione AB, « come parimente tutte le altre molecole di questo strato, che sarà « quindi sollecitato in tutta la sua estensione a sdrucciolare secondo « il suo piano AB. Dal traslocamento di questo strato verrà prodotto « successivamente un'effetto eguale sugli strati paralleli $A'B'$, $A''B''$ ec. « ed è in questo modo che le vibrazioni trasversali dell'onda inciden- « te potranno trasmettersi in tutta l'estensione del mezzo.

« La forza che spinge il punto M, secondo AB, per causa del tra-

« slocamento dello strato *E F*, e degli strati superiori che scorrono
« nel loro piani, è dovuta a che i loro elementi materiali non sono
« continui: se lo fossero, ciascun punto *M* dello strato *A B* resterebbe
« indifferente ad un semplice sdrucciolamento dagli strati superiori che
« non recherebbero allora alcun cangiamento nell' aziono che esse eser-
« citano sopra questo punto. » La costituzione dell' etere in atomi isolati, e la sussistenza delle vibrazioni trasversali sono dunque intimamente legate, e non possono sussistere l' una indipendentemente dall' altra.

Deduzione delle formole fondamentali pel calcolo della quantità di luce riflessa e rifratta alla prima superficie dei mezzi unirifrangenti.

Formata un' idea del modo con cui le vibrazioni trasversali vanno propagandosi in un mezzo elastico, passeremo a dare un saggio dei ragionamenti coi quali Fresnel ha dedotto le sue formule pel calcolo della quantità di luce riflessa alla prima superficie di un mezzo rifrangente, nell' ipotesi che i mezzi contigui abbiano la stessa elasticità, e differiscano soltanto nelle loro densità.

Quest' autore comincia dal rammentare (1) « che la sua ipotesi
« fondamentale consiste in ciò che le vibrazioni luminose s' esegui-
« scono tangenzialmente alla superficie dell' onda o perpendicolarmente
« al raggio; dal che risulta che un fascio di luce polarizzato è quello
« i cui movimenti vibratorii conservano una direzione unica e costante,
« e che il suo piano di polarizzazione è il piano perpendicolare a que-
« sta direzione costante delle piccole oscillazioni delle molecole eteree.
« Così quando il fascetto di luce è polarizzato secondo il piano d' inci-
« denza, le vibrazioni sono perpendicolari a questo piano, e per con-
« seguenza sono sempre parallele alla superficie rifrangente qualunque
« sia l' inclinazione dei raggi (2). Non è lo stesso pei fascetti che sono
« stati polarizzati perpendicolarmente al piano d' incidenza, perchè le
« loro vibrazioni eseguendosi in tal caso in questo piano, non sono pa-
« rallele alla superficie rifrangente che quando l' incidenza è perpendi-
« colare, in seguito formano con essa degli angoli tanto più grandi
« quanto più i raggi s' inclinano, e le divengono infine perpendicolari
« quando i raggi sono paralleli alla medesima.

« Ciò posto secondo la natura dell' elasticità che io considero, che è
« quella che s' oppone allo scorrimento d' uno strato di un mezzo sopra
« lo strato seguente, od allo spostamento relativo degli strati in contatto
« di due mezzi differenti, gli strati contigui dei due mezzi devono ese-
« guire parallelamente alla superficie che li separa delle oscillazioni
« della stessa ampiezza, senza di che uno di questi strati sarebbe scorso

(1) Mémoires de l'Academie des Sciences. Tom. XI pag. 394.

(2) Si suppone, ben inteso, che i centri degli scuotimenti che hanno prodotto l' onda incidente siano come ad una distanza infinita, di modo che quest' onda sia piana.

« sull' altro d' una quantità d' un ordine ben superiore allo spostamento « relativo degli strati contigui di ciascun mezzo separatamente, dal che « nascerebbe una resistenza molto più grande che s' opporrebbe a que- « sto spostamento. Così si può ammettere come una conseguenza evi- « dente della nostra Ipotesi fondamentale sulla natura dell' elasticità « messa in giuoco dalle vibrazioni luminose, che le velocità assolute « delle molecole vicine della superficie rifrangente parallelamente a que- « sta superficie devono essere eguali nei due mezzi. Ora questi movi- « menti, nel primo mezzo, si compongono assieme dallo scuotimento « causatovi dall' onda incidente, e da quello dell' onda riflessa; vale a « dire che la componente parallela alla superficie rifrangente del mo- « vimento impresso a ciascuna molecola del primo mezzo dall' onda « incidente e dall' onda riflessa, deve essere eguale alla componente « parallela della velocità assoluta delle molecole del secondo mezzo; « od in altri termini, supponendo la superficie rifrangente orizzontale « per semplificare le espressioni, la componente orizzontale della velo- « cità assoluta recata dall' onda incidente, aggiunta alla componente « orizzontale della velocità assoluta impressa dall' onda riflessa (presa « col segno che le conviene) eguaglia la componente orizzontale della « velocità assoluta delle molecole del secondo mezzo nell' onda rifratta.

« Quando l'onda incidente è polarizzata secondo il piano d'incidenza, « vale a dire le sue vibrazioni s' eseguiscono perpendicolarmente a que- « sto piano, esse sono pure tutte orizzontali tanto nell' onda riflessa che « nell' onda rifratta. Prendendo quindi per unità la velocità massima « delle vibrazioni del raggio incidente, e denotando con v ed u quelle « del raggio riflesso e rifratto, le velocità orizzontali delle vibrazioni « corrispondenti dei tre raggi saranno espresse da

$$(1)\quad \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{f}{\lambda}\right)\ ,\quad v\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{f'}{\lambda'}\right)\ ,\quad u\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{f''}{\lambda''}\right)$$

« e togliendo in ciascuna il seno come fattore comune, perchè le vibra- « zioni dei tre raggi sono nella stessa fase di vibrazione, si dovrà « avere giusta l' ipotesi sovr' esposta

$$(2)\qquad 1+v=u\quad ,\ \text{o vero}\quad (1+v)^2=u^2.$$

« Nel secondo caso, vale a dire quello nel quale la luce è polarizzata « perpendicolarmente al piano d' incidenza, le vibrazioni esegnendosi « allora parallelamente a questo piano e perpendicolarmente ai raggi « incidenti riflessi e rifratti, le componenti orizzontali delle tre veloci- « tà surriferite (1) si otterranno moltiplicandole respettivamente per « $\cos i$, $\cos i$ e $\cos i'$, le lettere i ed i' denotando l' angolo d' incidenza e « l' angolo di rifrazione. Si dovrà dunque avere secondo l' ipotesi sovra « esposta

$$(3)\quad (1+v)\cos i=u\cos i'\quad ,\ \text{o vero}\quad (1+v)^2\cos^2 i=u^2\cos^2 i'.$$

« È palese che l'equazioni (2) (3) sussistono presso la superficie di « contatto dei due mezzi, ma noi ammetteremo che le componenti oriz- « zontali si manterranno costantemente eguali durante tutto il tempo « che gli elementi successivi delle onde riflesse e rifratte s'allontane- « ranno da questa superficie, e per conseguenza le due equazioni (2) « (3) sussisteranno a tutte le distanze. »

Onde conseguire una seconda equazione necessaria alla soluzione delle questioni, Fresnel ricorre al principio della conservazione delle forze vive. Quando i due mezzi contigui siano supposti perfettamente diafani talchè non vi sia luce estinta, le quantità di forze vive delle vibrazioni dell'onda riflessa e dell'onda rifratta devono ancora uguagliare quella dell'onda incidente. « Siccome nell'espressione delle forze « vive oltre le velocità entrano le masse, bisogna poter paragonare le « masse che vengono scosse nei due mezzi, ciò che riesce facile col « mezzo della legge conosciuta della rifrazione ».

« Sia $E\,F$, fig. 151, la superficie rifrangente, $A\,B$ l'onda incidente, « $a\,b$ la stessa onda rifratta; se dal punto A si abbassa sopra $a\,b$ il rag- « gio perpendicolare $A\,a$, e che dal punto b si concepisca similmente « un raggio $B\,b$ perpendicolare all'onda incidente. È chiaro che $A\,B$, « ed $a\,b$ sono delle estensioni corrispondenti delle due onde nei due « mezzi, vale a dire che la parte $A\,B$ dell'onda incidente occuperà « nel secondo mezzo l'estensione $a\,b$. Quanto agli spazii relativi ch'es- « se occupano nel verso perpendicolare, secondo la direzione dei raggi « $I\,A$ ed $A\,a$, questi sono precisamente le lunghezze delle ondulazioni « nei due mezzi, la cui ragione è quella del seno dell'angolo d'inci- « denza $I\,A\,C$ al seno dell'angolo di rifrazione $R\,A\,a$, per cui le dimen- « sioni relative delle onde nella direzione dei raggi potranno essere rap- « presentate da sin i, e sin i', e per conseguenza i volumi delle due « porzioni corrispondenti che consideriamo nelle onde incidenti e ri- « fratte saranno tra loro come $A\,B$. sin i è ad $a\,b$ sin i'. Ma prenden- « do $A\,B$ per raggio, $A\,B$ ed $a\,b$ sono i coseni rispettivi degli angoli « $B\,A\,b$, $A\,b\,a$, o degli angoli i ed i', ai quali questi sono eguali; i due « volumi sono adunque fra loro come sin i cos i è a sin i' cos i'. Ci re- « sta di mollipicarli per le densità onde avere le ragioni delle masse. « Ora siccome i due mezzi sono supposti avere la stessa elasticità e « differire soltanto nella densità, le velocità di propagazione in questi « due mezzi saranno in ragione inversa delle radici quadrate della loro « densità (1); così si ha

$$\sin i : \sin i' :: \frac{1}{\sqrt{d}} : \frac{1}{\sqrt{d'}}$$

« o vero

(1) Ciò si riferisce alla formola (7) della Nota I alla Lezione XX facendo che le forze d'elasticità, espresse da $g\,(1+\gamma)\,p$ in quella formola, siano eguali pei due mezzi.

$$d : d' :: \frac{1}{\sin^2 i} : \frac{1}{\sin^2 i'};$$

« moltiplicando questo rapporto per quello dei volumi, avremo per « quello delle masse

$$\frac{\sin i \cos i}{\sin^2 i} : \frac{\sin i' \cos i'}{\sin^2 i'}$$

« o vero

$$\frac{\cos i}{\sin i} : \frac{\cos i'}{\sin i'}.$$

« Se dunque si prende $\frac{\cos i'}{\sin i'}$ per rappresentare la massa scossa nell'on-
« da rifratta, $\frac{\cos i}{\sin i}$ sarà la massa scossa nell'onda incidente, e nello « stesso tempo la massa corrispondente dell'onda riflessa, poichè le « parti corrispondenti delle onde incidenti e riflesse hanno lo stesso vo- « lume e sono di più situate nello stesso mezzo. »

Ciò posto dividiamo col pensiero l'onda incidente in una infinità di scuotimenti successivi, e le onde riflesse e rifratte in un medesimo numero d'elementi simili. È evidente che le proporzioni fra gli elementi corrispondenti dell'onda incidente e dell'onda rifratta, e riflessa, saranno costanti per tutte le parti di queste onde, ed indipendenti dal fattore espresso dal seno dell'angolo variabile delle formole (1), il quale è d'eguale valore in tutte e tre. Per conseguenza la massa dell'onda rifratta moltiplicata per u^2, più la massa dell'onda riflessa moltiplicata per v^2, devono dare una somma eguale alla massa dell'onda incidente moltiplicata per 1, onde la somma delle forze vive resti costante; si ha dunque

$$\frac{\cos i}{\sin i} \cdot 1 = \frac{\cos i'}{\sin i'} \cdot u^2 + \frac{\cos i}{\sin i} v^2$$

o vero

$$\frac{\cos i}{\sin i} (1 - v^2) = \frac{\cos i'}{\sin i'} u^2$$

« o vero

(4) $$\sin i' \cos i (1 - v^2) = \sin i \cos i' . u^2.$$

« Tale è l'equazione che risulta dal principio della conservazione « delle forze vive, e che deve essere soddisfatta in tutti i casi, sia « che il raggio incidente sia polarizzato parallelamente o perpendicolar- « mente al piano d'incidenza.

« Dividendo, pel primo caso, quest'equazione per quella segnata « (2) si ha

$$\sin i' \cos i \left(\frac{1 - v}{1 + v}\right) = \sin i \cos i',$$

« o vero

$$\sin i' \cos i \, (1 - v) = \sin i \cos i' \, (1 + v) \; ;$$

« da dove si deduce

$$v = -\frac{\sin i \cos i' - \sin i' \cos i}{\sin i \cos i' + \sin i' \cos i} = -\frac{\sin(i - i')}{\sin(i + i')} .$$

« Operando invece, pel secondo caso, la divisione coll' equazione se-
« gnata (3) si ha

$$\frac{1 - v}{1 + v} \cdot \frac{1}{\sin i \cos i} = \frac{1}{\sin i' \cos i'} , \; 1$$

« o vero

$$(1 - v) \sin i' \cos i' = (1 + v) \sin i \cos i \; ;$$

« dalla quale si deduce

$$v = -\frac{\sin i \cos i - \sin i' \cos i'}{\sin i \cos i + \sin i' \cos i'} = -\frac{\tan(i - i')}{\tan(i + i')} .$$

L' intensità della luce essendo, per uno stesso mezzo, proporzionale al quadrato della velocità, si avrà pel caso, in cui il raggio riflesso è polarizzato nel piano d' incidenza, l' intensità

$$(5) \qquad I_c^2 = \frac{\sin^2(i - i')}{\sin^2(i + i')} ;$$

e pel secondo caso, in cui lo stesso raggio è polarizzato perpendicolarmente al piano d' incidenza,

$$(6) \qquad I_c'^2 = \frac{\tan^2(i - i')}{\tan^2(i + i')} .$$

che sono le due formole riferite nel testo.

Annotazione.

È opportuno l' avvertire che, se si suppongono le masse dell' onda incidente o riflessa, e dell' onda rifratta proporzionali ai volumi $\sin i$, $\cos i$ e $\sin i' \cos i'$, ciò che importa che le densità dell' etere nei due mezzi siano eguali, e si procede nello stesso modo a rifare il calcolo delle velocità v, si trova che le formole (5) (6) s' invertono; cioè il valore di $I_c'^2$ corrispondente al raggio in cui le vibrazioni sono parallele al piano d' incidenza, diviene quello di I_c^2 del raggio in cui le vibrazioni sono perpendicolari al detto piano, e viceversa. Come il valore I_c^2 della formola (1) rappresenta le proprietà del raggio polarizzato nel piano d' incidenza (1), converrebbe conchiudere che in quest' ipotesi, le

(1) Vedansi l' articolo 5 Lezione XXXII, e gli articoli 5 e 6 di questa Lezione.

vibrazioni del raggio polarizzato nel piano d' incidenza sono parallele a questo piano. Questo risultato opposto a quello di Fresnel è stato adottato da Neuman in Germania e da Mac-cullagh in Inghilterra, che hanno preferito l' ipotesi d' una densità costante dei due mezzi, sulla considerazione che essa gode della proprietà di far sì che quando le vibrazioni sono oblique al mezzo rifrangente, le loro componenti tanto quelle parallele a questo mezzo quanto l' altre perpendicolari, degli atomi d' etere posti dall' una e dall' altra parte del piano di separazione dei due mezzi, sono concordi fra di loro. Le proprietà del raggio riflesso polarizzato nel piano d' incidenza essendo le stesse di quelle del raggio ordinario nei cristalli birifrangenti, e quelle del raggio polarizzato nel piano opposto coincidendo con quelle del raggio straordinario, ne viene di conseguenza che se si adotta la detta ipotesi si deve anche assumere che nei cristalli ad un asse ottico, il raggio ordinario fa le sue vibrazioni nel piano della sezione principale, e lo straordinario perpendicolarmente a questo piano. Un tale cambiamento è quindi stato introdotto nella teoria della doppia rifrazione dai suddetti autori. Non essendosi però ancora pervenuto a dedurre rigorosamente dai principii della Meccanica razionale i movimenti dell' etere in questi casi, ed i risultati ottenuti dipendendo puramente da certe supposizioni dalle quali si è partiti di preferenza, ci atterremo per ora all' ipotesi del fondatore di queste teorie, che è quella di cui si fa comunemente uso nei trattati di Fisica.

Nota II.

Sul principio che una stessa quantità di luce, sì pel raggio riflesso che pel raggio rifratto viene rispettivamente polarizzata in due piani opposti da una superficie birifrangente.

Questo è il luogo di dar la dimostrazione della proprietà che il Sig. Arago ha dedotto dall' esperimento esposto all' articolo 14 della Lezione XXXII. In questo esperimento, come si è fatto osservare nel medesimo articolo, conviene tener conto nel raggio riflesso oltre alla parte che si riflette sulla superficie anteriore ID, fig. 70, anche di tutte quelle che giungono all' occhio dopo aver subito 1, 3, 5 ec. riflessioni interiori nel vetro, e due rifrazioni una all' entrare, e l' altra all' uscire dal medesimo; come pure dobbiamo, nel raggio rifratto, tener conto oltre alla porzione che attraversa semplicemente la lamina anche di quelle che sortono dopo aver sofferto 2, 4, 6 ec. riflessioni interiori.

Per fare il calcolo della somma di tutte le porzioni di luce che compongono il raggio riflesso, si dovrà, nella formola (40) dell' articolo 11 della presente Lezione, porre dapprima $n = 1$, $n' = 0$; e poi $n' = 2$ e successivamente $n = 1, 3, 5$ ec. Il raggio riflesso I_c^2 sarà così composto delle due serie

$$I_c^2 = I^2 \cos^2 a \; p^2 + I^2 \cos^2 a \; p^2 (1-p^2)^2 + I^2 \cos^2 a \; p^6 (1-p^2)^2 + \text{ec.}$$

$$+ I^2 \sin^2 a \; q^2 + I^2 \sin^2 a \; q^2 (1-q^2)^2 + I^2 \sin^2 a \; q^6 (1-q^2)^2 + \text{ec.}$$

È facile vedere che queste due serie risultano dallo sviluppo dei denominatori nell' equazione seguente

$$I_c^2 = I^2 \cos^2 a \,.\, p^2 \left(1 + \frac{(1-p^2)^2}{1-p^4}\right) + I^2 \sin^2 a \,.\, q^2 \left(1 + \frac{(1-q^2)^2}{1-q^4}\right),$$

che si riduce facilmente a

$$I_c^2 = I^2 \cos^2 a \, \frac{2\,p^2}{1+p^2} + I^2 \sin^2 a \, \frac{2\,q^2}{1+q^2} \,.$$

Per avere la quantità di luce riflessa di un raggio di luce naturale dobbiamo porre in questa formula $I^2 = \frac{1}{2}$, e prendere successivamente $a = 45^\circ$, e poi $a = -45^\circ$, o sia $\sin^2 a = \cos^2 a = \frac{1}{2}$, e fare la somma dei risultamenti, ciò che dà

$$(1) \qquad I_c^2 = \tfrac{1}{2} \left(\frac{2\,p^2}{1+p^2} + \frac{2\,q^2}{1+q^2}\right) :$$

la prima parte rappresenta la luce polarizzata nel piano d' incidenza, e la seconda quella nel piano opposto.

Onde ottenere l' espressione di tutte le porzioni di luce componenti il raggio rifratto I_d^2, si deve fare nella citata formula (40) $n' = 2$, e successivamente $n = 0, 2, 4, 6$ ec. indi prendere la somma di tutti i termini, risulterà così

$$I_d^2 = I^2 \cos^2 a \,.\, (1-p^2)^2 + I^2 \cos^2 a \,.\, p^4 (1-p^2)^2 + I^2 \cos^2 a \,.\, p^8 (1-p^2)^2 + \text{ec.}$$

$$+ I^2 \sin^2 a \; (1-q^2)^2 + I^2 \sin^2 a \; p^4 (1-q^2)^2 + I^2 \sin^2 a \; q^8 (1-q^2)^2 + \text{ec.};$$

le quali serie nascono dallo sviluppo dei denominatori dell' equazione

$$I_d^2 = I^2 \cos^2 a \, \frac{(1-p^2)^2}{1-p^4} + I^2 \sin^2 a \, \frac{(1-q^2)^2}{1-q^4},$$

che si riduce a

$$I_d^2 = I^2 \cos^2 a \, \frac{1-p^2}{1+p^2} + I^2 \sin^2 a \, \frac{1-q^2}{1+q^2}.$$

Facendo $I^2 = \frac{1}{2}$ ed $a = 45^\circ$, e poi $a = -45^\circ$, per applicare questa formola ai due raggi polarizzati nei piani opposti dai quali può concepirsi costare il raggio incidente di luce naturale, e prendendo la somma dei resultamenti, si avrà

$$(2) \qquad I_d^2 = \tfrac{1}{2} \, \frac{1-p^2}{1+p^2} + \tfrac{1}{2} \, \frac{1-q^2}{1+q^2};$$

dove il primo termine dinota la luce polarizzata nel piano d'incidenza, ed il secondo quella perpendicolarmente allo stesso piano.

La riunione dei due raggi I_c^2 ed I_d^2 dati dalle formole (1) e (2) somministra

$$I_c^2 + I_d^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}$$

cioè il raggio che compongono consta di due raggi ciascuno eguale ad $\frac{1}{2}$, polarizzati ad angolo retto, e perciò equivalgono ad un raggio di luce naturale, come mostrò l'esperimento.

Se si analizza separatamente il valore di ciascun raggio, il riflesso ed il rifratto; dando all'espressione (1) del raggio riflesso la forma

$$I_c^2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{2p^2}{1+p^2} - \frac{2q^2}{1+q^2}\right) + \frac{q^2}{1+q^2} + \frac{q^2}{1+q^2},$$

nei primi tre termini della quale la q non entra che apparentemente, si vede che le parti $\frac{q^2}{1+q^2}$, delle quali una appartiene alla porzione di luce polarizzata nel piano d'incidenza, e l'altra a quella polarizzata nel piano opposto, formano un raggio solo che avrà le apparenze di un raggio di luce naturale dell'intensità $\frac{2q^2}{1+q^2}$; l'altra parte

$$\frac{p^2}{1+p^2} - \frac{q^2}{1+q^2} = \frac{p^2-q^2}{(1+p^2)(1+p^2)}$$

sempre positiva, poichè $p > q$, sarà quella che rimane polarizzata nel piano d'incidenza, e sarà la sola che aumenterà o diminuirà di splendore durante la rotazione del prisma analizzante.

Parimenti ponendo il raggio rifratto, (2), sotto la forma

$$I_d^2 = \tfrac{1}{2}\,\frac{1-p^2}{1+p^2} + \tfrac{1}{2}\,\frac{1-p^2}{1+q^2} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{1-q^2}{1+q^2} - \frac{1-p^2}{1+p^2}\right)$$

la porzione $\frac{1}{2}\,\frac{1-p^2}{1+p^2}$, che può considerarsi esistente, tanto nella luce polarizzata nel piano d'incidenza, che in quella polarizzata nel piano opposto, dà una porzione $\frac{1-p^2}{1+p^2}$ di luce naturale; l'altra porzione eccedente di luce polarizzata perpendicolarmente al piano d'incidenza espressa da

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1-q^2}{1+q^2} - \frac{1-p^2}{1+p^2}\right) = \frac{p^2-q^2}{(1+p^2)(1+q^2)}$$

varierà d'intensità nella rotazione del prisma analizzante, e parrà sola polarizzata nel detto piano. Dal confronto di questo valore col prece-

dente risulta dunque che le due porzioni di luce che si scorgono polarizzate nei due piani opposti, quando si riceve soltanto il raggio riflesso od il raggio rifratto, sono eguali nell' uno e nell'altro raggio.

Le formole fondamentali del testo, le quali inchiudono la supposizione, che la luce che si polarizza in un piano per riflessione sia eguale a quella che si polarizza nel piano opposto, conducendoci al risultamento sperimentale del Sig. Arago, avremo viceversa in questo esperimento la conferma che quel principio assunto è giusto. Questo principio è di grande importanza nella teorica della polarizzazione, e ci siamo perciò arrestati a dilucidarlo.

NOTE ALLA LEZIONE XXXIV.

NOTA I.

Delle modificazioni che la luce polarizzata riceve dalla riflessione totale sui mezzi unirifrangenti.

Esporrò in questa nota il modo col quale Fresnel è pervenuto all'interpretazione dell'immaginario che presentano le formole date nella Lezione precedente, nel caso della riflessione totale, interpretazione della quale ha verificato la giustezza cogli esperimenti citati nel testo.

Perciò consideriamo un raggio, polarizzato in un piano che faccia un azimut di 45° col piano d'incidenza, come composto di due raggi, uno polarizzato nel piano d'incidenza, e l'altro nel piano opposto, ciascuno d'una intensità eguale all'unità.

Cominciando dal primo, la velocità massima delle vibrazioni del raggio riflesso sarà data, come abbiamo visto nella Nota I alla Lezione precedente, da

$$v = \frac{\sin i' \cos i - \sin i \cos i'}{\sin i' \cos i + \sin i \cos i'}$$

o vero ponendo per $\cos i'$ il valore che si deduce dall'equazione

$$(1) \qquad \sin i' = \frac{\sin i}{n},$$

da

$$v = \frac{\sin i \cos i - \sin i \sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{\sin i \cos i + \sin i \sqrt{n^2 - \sin^2 i}}.$$

Nel caso che il secondo mezzo sia meno rifrangente del primo, ed il valore di n sia frazionario, questa formola dà un valore reale per v sino a tanto che $\sin i < n$, quando $\sin i = n$, si ha $v = 1$, cioè il raggio è tutto riflesso come si sa dall'esperienza; se poi $\sin i > n$, sappiamo dall'esperienza che il raggio continua ad essere totalmente riflesso, ma la formola precedente dà per v un valore immaginario.

Riduciamo questa formola all'espressione generale delle quantità immaginarie. Perciò togliamo il fattore $\sin i$, che è comune al numeratore ed al denominatore, scriviamo $\sqrt{\sin^2 i - n^2}.\sqrt{-1}$ in luogo di $\sqrt{n^2 - \sin^2 i}$, e moltiplichiamo in alto e in basso pel numeratore, si troverà

$$v = \frac{1 + n^2 - 2\sin^2 i - 2\cos i \sqrt{\sin^2 i - n^2 i}.\sqrt{-1}}{1 - n^2}.$$

Fresnel osserva che la formola (1) essendo alla a dare la grandezza delle vibrazioni del raggio riflesso sino a che sin $i = n$, dovrebbe per la legge di continuità seguitare a rappresentare la stessa grandezza anche quando sin $i > n$, se questa formola si scompone in due parti, delle quali una contiene un' immaginario, ciò deve essere perchè, nello stabilire le equazioni dalle quali fu tratto il valore di v nel caso che il raggio è parzialmente riflesso, si è introdotto qualche condizione che è incompatibile nel caso presente, e l' analisi ce lo avverte producendo l' immaginario. Questa incompatibilità, dice Fresnel, fu introdotta perchè nello stabilire le nostre formole abbiamo supposto che il raggio riflesso conservi lo stesso periodo di fase del raggio incidente, e che la sua vibrazione sia tuttora rappresentata da $v \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{f}{\lambda}\right)$. Se nel caso della riflessione totale, il raggio riflesso cambia il periodo della sua fase, la sua vibrazione deve essere rappresentata da $v \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{f'}{\lambda}\right)$, f' essendo diverso da f, e perciò abbiamo assunto un' incompatibilità analitica, poichè non si potrà mai fare, qualunque sia il valore reale di v che si assuma, che queste due formole diventino identiche, per tutti i valori variabili di t (1). « Seguendo quest' idea possiamo concepire il si« stema di onde riflesso decomposto in due altri, differenti di un quarto « d'ondulazione, e dei quali uno abbia sempre alla sua superficie lo stesso « periodo di fase dell' onda incidente, come abbiamo supposto primiti« vamente nel nostro calcolo, od in altri termini che sarebbe riflessa « alla superficie stessa di separazione di due mezzi; allora il coefficiente « di questo sistema d' onde sarà reale, e quello dell' altro immagina« rio Se la forma alla quale abbiamo ridotto il valore di v mette in « evidenza questi due coefficienti, bisognerà che il quadrato del primo « termine

$$(2) \qquad \frac{1 + n^2 - 2 \sin^2 i}{1 - n^2},$$

« più il quadrato del secondo

$$(3) \qquad \frac{-2 \cos i \sqrt{\sin^2 i - n^2}}{1 - n^2},$$

« che nel valore di v è moltiplicato pel fattore immaginario $\sqrt{-1}$, « diano una somma eguale all' unità, per rappresentare la totalità del « raggio riflesso (2); ora questo è appunto quello che realmente avvie-

(1) Mémoires de l'Académie de Sciences. Tom. XI pag. 414.

(2) La formola (6)' dell' art. 11 della Lez. XXVI, facendo in essa $f' = \frac{1}{4}$ dà per l' intensità del raggio risultante $I^2 = i^2 + i'^2$, ed I^2 deve essere eguale all' unità per esperienza.

« ne, poichè la somma dei due quadrati produce effettivamente l'unità.
« Possiamo dunque con una speranza ben fondata di non ingannarci,
« determinare la posizione del sistema d'onde riflesse per mezzo di
« questi due sistemi componenti, dei quali l'uno partendo dalla su-
« perficie stessa ha per coefficiente delle sue velocità assolute il ter-
« mine segnato (2), e l'altro che differisce dal primo di un quarto
« d'ondulazione ha per coefficiente il termine segnato (3). »

Quanto abbiamo fatto rispetto al primo raggio componente, polarizzato nel piano d'incidenza, può ripetersi rispetto all'altro raggio componente polarizzato perpendicolarmente allo stesso piano. La velocità massima del raggio riflesso in questo caso si ha dalla formola data nella Nota I della Lezione precedente, che è

$$v = \frac{\sin i \cos i - \sin i' \cos i'}{\sin i \cos i + \sin i' \cos i'} . \text{ (1)}$$

Eliminando i' coll'equazione (1) si avrà

$$v = \frac{n^2 \sin i \cos i - \cos i \sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{n^2 \sin i \cos i + \cos i \sqrt{n^2 - \sin^2 i}} .$$

Nel caso di $\sin i > n$, che noi consideriamo, il valore del radicale diviene immaginario, per cui, seguendo lo stesso processo che ab-

(1) Abbiamo cambiato il segno al valore di v, come deve essere, perchè il segno —, prefisso nella formola citata, non indicava altro se non che le componenti delle vibrazioni parallele al piano rifrangente del raggio riflesso erano in direzione contraria a quella del raggio incidente. Nello stabilire quelle formole non si sono seguite le regole generali dell'analisi, secondo le quali le velocità assolute vanno considerate come positive, e la loro direzione sempre vien data dal segno delle linee trigonometriche dalle quali sono moltiplicate. Così, gli angoli che i piani delle onde incidenti, riflessa e rifratta, nelle direzioni dei quali si eseguiscono le vibrazioni, fanno rispettivamente col piano della superficie rifrangente essendo equivalenti a quelli fatti dalle rispettive perpendicolari prolungate nelle direzioni in cui si propagano i movimenti; e questi angoli essendo misurati da i, $180 - i$, ed i' fig. 151 bis, le componenti delle velocità parallele alla superficie rifrangente si otterranno moltiplicando le velocità assolute 1, v ed u pei coseni degli angoli su nominati, e queste componenti saranno perciò espresse da

$$\cos i \quad , \quad - v \cos i \quad , \quad u \cos i'$$

e l'equazione (3) diverrà

$$\cos i - v \cos i = u \cos i'$$

che trattata nello stesso modo, unitamente alla (4), conduce al valore di v che ora abbiamo adottato.

biamo usato precedentemente pel raggio polarizzato nel piano d'incidenza, porremo il valore di v sotto la forma

$$v = \frac{n^4 \cos^2 i - \sin^2 i + n^2}{n^4 \cos^2 i + \sin^2 i - n^2} - \frac{2 n^2 \cos i \sqrt{\sin^2 i - n^2}}{n^4 \cos^2 i + \sin^2 i - n^2} \cdot \sqrt{-1}.$$

Potremo considerare anche per questo secondo raggio la luce riflessa come composta di due sistemi d'onde separati da un quarto d'ondulazione, il primo dei quali partito dalla superficie abbia per coefficiente delle sue velocità assolute

$$(4) \qquad \frac{n^4 \cos^2 i - \sin^2 i + n^2}{n^4 \cos^2 i + \sin^2 i - n^2},$$

ed il secondo

$$(5) \qquad -\frac{2 n^2 \cos i \sqrt{\sin^2 i - n^2}}{n^4 \cos^2 i + \sin i^2 - n^2};$$

e si troverà che questa supposizione è in gran parte legittimata dalla circostanza che, infatti la somma dei quadrati di questi due coefficienti è eguale all'unità, come deve essere.

Volendo comporre le vibrazioni dei due sistemi polarizzati nel piano d'incidenza e differenti fra loro di un quarto di vibrazione, potremo valerci delle formole (4) dell'articolo 11 della Lezione XXVI facendo in esse $f = 0$, pel primo sistema, $f' = \frac{1}{4}$ pel secondo sistema, ed assumendo per i ed i' i valori segnati (2)', (3). Si avranno così per determinare la vibrazione risultante, le equazioni

$$I \cos 2\pi \frac{\varphi}{\lambda} = \frac{-(1 - n^2) + 2 \cos^2 i}{1 - n^2},$$

$$I \sin 2\pi \frac{\varphi}{\lambda} = -\frac{2 \cos i \sqrt{1 - n^2 - \cos^2 i}}{1 - n^2};$$

dai secondi membri delle quali abbiamo eliminato $\sin^2 i$ colla formola $\sin^2 i = 1 - \cos^2 i$.

Facendo la somma dei quadrati delle due equazioni si ottiene, come già abbiamo osservato sopra,

$$I^2 = 1:$$

e quindi resterà

$$\cos 2\pi \frac{\varphi}{\lambda} = \frac{-(1 - n^2) + 2 \cos^2 i}{1 - n^2},$$

$$\sin 2\pi \frac{\varphi}{\lambda} = -\frac{2 \cos i \sqrt{1 - n^2 - \cos^2 i}}{1 - n^2}.$$

Parimente per comporre le vibrazioni dei due sistemi d'onde polariz-

zati nel piano perpendicolare al piano d'incidenza dovremo porre $f=0$, ed $f'=\frac{1}{2}$ nelle citate formole (4), e per i ed i' i valori segnati (4) (5). Distinguendo con un apice le quantità I e φ spettanti alla vibrazione risultante in questo secondo caso, queste quantità si determineranno colle equazioni

$$I'\cos 2\pi\frac{\varphi'}{\lambda}=\frac{-(1-n^2)+(1+n^4)\cos^2 i}{(1-n^2)(1-(1+n^2)\cos^2 i)},$$

$$I'\sin 2\pi\frac{\varphi'}{\lambda}=-\frac{2n^2\cos i\sqrt{1-n^2-\cos^2 i}}{(1-n^2)(1-(1+n^2)\cos^2 i)}.$$

La somma dei quadrati di queste due equazioni dà pure

$$I'^2=1,$$

per cui avremo semplicemente

$$\cos 2\pi\frac{\varphi'}{\lambda}=\frac{-(1-n^2)+(1+n^4)\cos^2 i}{(1-n^2)(1-(1+n^2)\cos^2 i)},$$

$$\sin 2\pi\frac{\varphi'}{\lambda}=-\frac{2n^2\cos i\sqrt{1-n^2+\cos^2 i}}{(1-n^2)(1-(1+n^2)\cos^2 i)}.$$

La differenza di fase dei due sistemi risultanti ora ottenuti, e polarizzati ad angolo retto fra loro, si potrà avere dalla formola trigonometrica

$$\cos 2\pi\frac{\varphi-\varphi'}{\lambda}=\cos 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}\cos 2\pi\frac{\varphi'}{\lambda}+\sin 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}\sin 2\pi\frac{\varphi'}{\lambda'},$$

sostituendo nel secondo membro pei seni e coseni i valori dati precedentemente. Chiamando per brevità, δ l'angolo che misura questa differenza di fase, e facendo la suddetta sostituzione, si trova, eseguendo alcune facili riduzioni

$$\cos\delta=\frac{1-(3-n^2)\cos^2 i+2\cos^4 i}{1-(1+n^2)\cos^2 i}$$

Da questa si ottiene direttamente

$$1+\cos\delta=\frac{2\,(1-\cos^2 i)^2}{1-(1+n^2)\cos^2 i};$$

e poi sostituendo $2\cos^2\frac{1}{2}\delta$ ad $1+\cos\delta$, e $\sin^2 i$ ad $1-\cos^2 i$,

$$\cos^2\tfrac{1}{2}\delta=\frac{\sin^4 i}{(1+n^2)\sin^2 i-n^2}.$$

Dato quindi l'angolo d'incidenza, i, potremo con questa formola calcolare con quale differenza di fase si propagano per indietro i due raggi

riflessi polarizzati, uno nel piano d'incidenza, l'altro nel piano opposto, e componenti il raggio totale.

Dalla stessa equazione si ha viceversa

$$\sin^4 i - (1 + n^2) \cos^2 \tfrac{1}{2} \delta \,.\, \sin^2 i + n^2 \cos^2 \tfrac{1}{2} \delta = 0:$$

onde, se data la differenza di fase, con cui si vuole che siano riflessi i due raggi componenti, si cerca l'angolo sotto cui deve essere diretto il raggio incidente, facendo per brevità

$$\tfrac{1}{2} (1 + n^2) \cos^2 \tfrac{1}{2} \delta = \gamma \qquad ; \qquad n^2 \cos^2 \tfrac{1}{2} \delta = \varepsilon^2 ,$$

la nota risoluzione delle equazione di secondo grado ci darà

$$\sin^2 i = \gamma \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{\gamma^2}}\right).$$

Con questa formola, assumendo successivamente $\delta = 45^\circ;\ 30^\circ,\ 22^\circ \tfrac{1}{2}$, ed $n = \frac{1}{1{,}51}$ sono stati calcolati gli angoli i che abbiamo riferito nell'articolo 1 della presente Lezione.

NOTE ALLA LEZIONE XXXVI.

NOTA I.

Sulle lemniscate cromatiche che appaiono intorno agli assi ottici dei cristalli (Art. 5).

La retta $O\,O'$ rappresenti nella figura 152 la projezione stereografica del piano della sezione principale media della lamina di nitro, ed i punti O ed O' siano le projezioni dei due assi ottici della stessa lamina concorrenti al punto ove è situato l'occhio; C sia il punto di mezzo della linea $O\,O'$, la retta $P\,P'$ sia la projezione del piano di polarizzazione primitivo dei raggi di luce che sortono dalla prima lamina di tormalina, ed il punto L sia la projezione di uno di questi raggi diretto all'occhio dell'osservatore.

Riferiscasi la situazione del punto L alla linea $O\,O'$ per mezzo della sua distanza $L\,q$, e della parte $C\,q$ compresa fra il punto C, che chiamasi origine, ed il punto q che viene segato sulla $O\,O'$ dalla perpendicolare $L\,q$. La linea $C\,q$ chiamasi l'ascissa, e la $L\,q$ l'ordinata del punto L, ed un'equazione che dia una relazione, fra l'ascissa $C\,q$ e l'ordinata $L\,q$, che appartenga nel nostro caso a tutti i punti pei quali il prodotto $\sin\theta \sin\theta'$ riesca costante, chiamasi l'equazione della curva.

Per trovare questa relazione osservo che le rette $O\,L$ ed $O'L$, per la piccolezza degli archi θ e θ' che sottendono, possono assumersi rispettivamente eguali a $\sin\theta$ e $\sin\theta'$, o se si vuole anche gli archi θ, e θ', talchè si può stabilire che sia

$$O\,L \times O'L = \sin\theta \sin\theta' = \theta\,\theta'.$$

Ma posto

$$C\,q = x \quad ; \quad q\,L = y \quad ; \quad C\,O = C\,O' = \omega$$

nei due triangoli rettangoli $O\,q\,L \,.\, O'\,q\,L$ si ha

$$(2) \qquad \overline{L\,O'}^2 = (x-\omega)^2 + y^2 \quad ; \quad \overline{L\,O}^2 = (x+\omega)^2 + y^2,$$

quindi paragonando il valore del prodotto $\overline{L\,O}^2 \times \overline{L\,O'}^2$ che risulta da queste equazioni con quello che si ottiene dalla precedente si avrà

$$\left\{(x-\omega)^2 + y^2\right\}\left\{(x+\omega)^2 + y^2\right\} = \theta^2\,\theta'^2.$$

Sviluppando i quadrati, ed eseguendo il prodotto, si troverà

$$(x^2 + y^2 + \omega^2)^2 - 4\,\omega^2 x^2 = \theta^2\,\theta'^2,$$

come vien detto nel testo.

Nota II.

Sulle curve delle intensità di luce intorno agli assi ottici dei cristalli (Art. 8).

Nella figura 152 della nota precedente conducasi la retta LM per rappresentare la projezione del piano di polarizzazione del raggio ordinario. Per la piccolezza degli archi che si considerano potremo, secondo la legge citata nel testo, risguardare gli angoli OLI, $O'LI$ come eguali. Dinotiamo con λ il valore di uno di questi angoli e con ϖ l'angolo LIO, le note proprietà dei triangoli ci daranno le equazioni

$$\frac{\theta}{\sin\varpi} = \frac{IO}{\sin\lambda} \quad ; \quad \frac{\theta'}{\sin\varpi} = \frac{IO'}{\sin\lambda};$$

e quindi prendendo la somma delle due equazioni

$$\frac{\theta+\theta'}{\sin\varpi} = \frac{OO'}{\sin\lambda} = \frac{2\omega}{\sin\lambda};$$

per cui si avrà

$$\sin\lambda = \frac{2\omega}{\theta+\theta'}\sin\varpi.$$

Ma dal triangolo OLO' si ha pure, (1)

$$\sin\lambda = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(2\omega-\theta+\theta')(2\omega+\theta-\theta')}{\theta\theta'}},$$

paragonando questi due valori di $\sin\lambda$ si otterrà

$$(\theta+\theta')^2(2\omega-\theta+\theta')(2\omega+\theta-\theta') = 16\,\omega^2.\theta\theta'\sin^2\varpi.$$

Sostituendo $\frac{1-\cos 2\varpi}{2}$ a $\sin^2\varpi$, con alcune semplici riduzioni potremo dare a quest'equazione la forma

$$(\theta'^2-\theta^2)^2 - 4\,\omega^2(\theta^2+\theta'^2) = 8\,\omega^2\theta\theta'\cos 2\varpi.$$

Ma dalle equazioni (2) della Nota precedente si ricava

$$\theta'^2 - \theta^2 = 4\,\omega\,x$$

$$\theta^2 + \theta'^2 = 2\,(x^2+y^2+\omega^2).$$

quindi sostituendo e riducendo si dedurrà

$$x^2 - y^2 - \omega^2 = \theta\theta'\cos 2\varpi;$$

(1) Legendre Trig. LVII.

e ponendo per $\theta\,\theta'$ il valore dato dall'equazione (2) del testo

$$x^2 - y^2 - \omega^2 = \left\{ (x^2 + y^2 + \omega^2) - 4\,x^2\,\omega^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \cos 2\,\varpi$$

o vero facendo il quadrato, ed ordinando i termini

$$y^4 - 2\,\frac{1 + \cos^2 2\,\varpi}{1 - \cos^2 2\,\omega}\,x^2\,y^2 + x^4 + 2\,\omega^2\,(y^2 - x^2) + \omega^4 = 0.$$

Si può osservare, che si ha

$$\frac{1 + \cos^2 2\,\varpi}{1 - \cos^2 2\,\varpi} = \frac{1}{2}\,\frac{1 + \cos 2\,\varpi}{1 - \cos 2\,\varpi} + \frac{1}{2}\,\frac{1 - \cos 2\,\varpi}{1 + \cos 2\,\varpi};$$

e che, (1),

$$\frac{1 + \cos 2\,\varpi}{1 - \cos 2\,\varpi} = \cot^2 \varpi \quad ; \quad \frac{1 - \cos 2\,\varpi}{1 + \cos 2\,\varpi} = \tan^2 \varpi\,;$$

sarà quindi

$$y^4 - (\cot^2 \varpi + \tan^2 \varpi)\,x^2\,y^2 + x^4 + 2\,\omega^2\,(y^2 - x^2) + \omega^4 = 0.$$

Tenendo presente che $\tan^2 \varpi \cos^2 \varpi = 1$, a questa equazione potremo finalmente dare la forma citata nel testo che è

$$(y^2 - x^2 \cot^2 \varpi)\,(y^2 - x^2 \tan^2 \varpi) + 2\,\omega^2\,(y^2 - x^2) + \varpi^4 = 0.$$

Considerando nella presente equazione ϖ come costante, essa sarà atta a dare per ogni valore assunto di x i corrispondenti valori di y che segneranno tutti i punti della curva pei quali il piano di polarizzazione del raggio rispettivo faccia un angolo costante a col piano di polarizzazione primitiva. Infatti essendo come vien detto nel testo, e come è facile a riconoscersi sulla figura, $a = \varpi + \beta$, e β rimanendo costante per una stessa posizione della lamina, i valori di a ed ϖ saranno costanti assieme, ed a dinota appunto l'angolo suddetto dei due piani di polarizzazione.

2. Il fattore che moltiplica $\sin^2 a$ nell'espressione di I_e^2 rimane costante per tutti i punti della lemniscata data dall'equazione (2) del testo, o sia per tutti i punti che appaiono dello stesso colore. Il fattore $\sin^2 2\,a$ rimane costante per tutti i punti della curva data dalla precedente eqnazione, pei qnali il coefficiente dell'intensità di luce è costante. I punti comuni di queste due curve saranno quindi quelli che avranno un egual colore, ed una stessa intensità di luce. Volendo determinare questi punti, bisogna considerare x ed y come eguali nelle due citate equazioni, e ricavarne il loro valore. Ora l'equazione (2) sviluppata dà

(1) Legendre. Trig. art. XXX.

$$(x^2 + y^2)^2 - 2\omega^2(x^2 - y^2) + \omega^4 = \theta^2\theta'^2,$$

e dall'ultima equazione della pagina 340

$$x^2 - y^2 = \omega^2 + \theta\theta' \cos 2\varpi.$$

Sostituendo qnesto valore di $x^2 - y^2$ nella premessa equazione avremo

$$(x^2 + y^2)^2 = \omega^4 + 2\omega^2\theta\theta' \cos 2\varpi + \theta^2\theta'^2.$$

Ma $x^2 + y^2$ esprime il quadrato della distanza dei punti che si cercano dall'origine C, o centro delle lemniscate, dunque chiamando r questa distanza, sarà

$$r = \sqrt[4]{\omega^4 + 2\omega^2\theta\theta' \cos 2\varpi + \theta^2\theta'^2}:$$

e si otterranno quattro valori di r positivi ed eguali, prendendo

$$\varpi = \alpha - \beta\,,\ \varpi = \pi - \alpha + \beta\,,\ \varpi = \pi + \alpha - \beta\,,\ \varpi = 2\pi - \alpha + \beta$$

così in quattro direzioni il colore e l'intensità della luce saranno eguali, e si potranno determinare per ciascuna di esse le distanze di questi quattro punti colle formole precedenti. Nel testo gli angoli che danno queste direzioni sono stati per isbaglio, male indicati.

NOTE ALLA LEZIONE XXXVII.

Nota I.

Della composizione di due movimenti vibratorii rettilinei, ad angolo retto fra loro, e differenti di un quarto di fase in un movimento circolare; e viceversa della composizione di due movimenti circolari eguali, ma con direzione contraria in un movimento vibratorio rettilineo; ed applicazioni al movimento rotatorio dei piani di polarizzazione dei raggi luminosi.

La composizione di due movimenti vibratorii rettilinei ad angolo retto fra loro e differenti d'un quarto d'ondulazione in un movimento circolare, della quale abbiamo dato un'idea sintetica nell'articolo 2 della Lezione XXXIV, e viceversa la composizione di due movimenti circolari eguali, ma con direzione contraria, che abbiamo geometricamente esposta nella presente Lezione, art. 4, possono facilmente tradursi in espressioni analitiche per mezzo delle formole che sono state date nella Lezione XXVI. In questa Lezione, art. 8, si è visto, che la distanza δ d'un atomo d'etere dal suo luogo d'equilibrio stabile, allorchè viene investito al passaggio d'un raggio luminoso, è espressa da

$$\delta = a \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{f}{\lambda}\right);$$

a dinotando la semi-amplitudine della vibrazione, f la fase al principio del tempo t, e τ e λ la durata e la lunghezza di un'ondulazione del raggio luminoso.

Immaginiamo due raggi eguali polarizzati ad angolo retto fra loro, le ondulazioni dell'uno dei quali precedano di un quarto quelle dell'altro, e che investano contemporaneamente un atomo. Le distanze x ed y, a cui le due vibrazioni trasporteranno simultaneamente un atomo dai piani rispettivi di polarizzazione dei due raggi, saranno secondo la premessa formula

$$x = a \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{1}{8}\right) \quad ; \quad y = a \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{1}{8}\right).$$

In queste formole il tempo è contato dall'istante in cui il primo raggio ha già progredito, rispetto all'altro, di $\frac{1}{8}$ d'ondulazione, e perciò quando al secondo raggio, che è indietro d'un quarto d'ondulazione, manca ancora un $\frac{1}{8}$ per compire la propria.

Se si osserva che (1)

$$(1)\quad \cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{1}{8}\right)=\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\right)=\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{1}{8}\right);$$

il valore di y dato dalla formola precedente diverrà

$$y=a\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{1}{8}\right).$$

Sommando il quadrato di questo valore di y, col quadrato del valore surriferito di x, si trova (2)

$$x^2+y^2=a^2.$$

In questa equazione x rappresenta per un istante qualunque, fig. 153, la distanza dell'atomo dalla traccia DE del piano di polarizzazione del primo raggio, ed y la distanza dalla traccia AB del piano di polarizzazione del secondo raggio; la somma dei quadrati di queste due distanze essendo costantemente eguale ad a^2, ciò mostra che l'atomo si muove in modo che sempre si trova alla stessa distanza dal punto C, o sia percorre la circonferenza $ADBE$ del circolo descritto con un raggio a, eguale alla semi-amplitudine delle vibrazioni causate da ciascuno dei due raggi luminosi.

Chiamiamo ω l'angolo che il raggio Ca che va all'atomo in un istante qualunque, fa coll'asse $C\Upsilon$ inclinato sulla traccia AB d'un angolo eguale a $\frac{\pi}{4}$, si avrà evidentemente (3)

$$x=a\cos\left(\omega+\frac{\pi}{4}\right)\quad;\quad y=a\sin\left(\omega+\frac{\pi}{4}\right);$$

e paragonando questi valori di x ed y coi precedenti, si vede che deve essere

$$(1)\qquad \omega=2\pi\frac{t}{\tau}.$$

L'angolo ω anderà dunque crescendo proporzionalmente al tempo t, e crescerà d'un'intera circonferenza nel periodo τ di una vibrazione, nel qual tempo l'atomo compirà un'intera rivoluzione circolando colla velocità uniforme $2\pi\frac{a}{\tau}$.

2. Se in luogo di considerare il primo raggio come quello che precede l'altro di un quarto d'ondulazione, si fosse considerato questo

(1) Legendre, Trigon. art. VI.
(2) Legendre, Trigon. art. XVI.
(3) Trigon. art. LI.

raggio come quello che segue il secondo della stessa quantità, le due distanze dell'atomo dai piani rispettivi di polarizzazione, in virtù delle vibrazioni causate da ciascun raggio, sarebbero date da

$$x' = a \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{1}{8}\right) \quad : \quad y' = a \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{1}{8}\right);$$

nelle quali formole il tempo sarebbe tuttavia contato dalla metà dell'intervallo in cui i raggi fanno cominciare all'atomo le rispettive vibrazioni.

Trasformando la prima delle precedenti equazioni col mezzo della formola (1), essa diverrà

$$x' = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{1}{8}\right);$$

e da questa e dalla precedente si dedurrebbe

$$x'^2 + y'^2 = a^2;$$

cioè l'atomo circolerebbe ancora in una circonferenza di raggio a. Ma siccome chiamando ω' l'angolo che il raggio Ca' del circolo che va all'atomo, fa coll'asse $C\Upsilon$, si avrebbe

$$x' = a \cos 2\pi \left(\omega' + \frac{\pi}{4}\right) \quad ; \quad y' = a \sin 2\pi \left(\omega' + \frac{\pi}{4}\right);$$

e questi valori di x' ed y' paragonati coi precedenti danno

$$(3) \qquad \omega' = \frac{\pi}{2} - 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{1}{8}\right) - \frac{\pi}{4} = -2\pi \frac{t}{\tau}:$$

così l'angolo ω' sarebbe bensì in grandezza eguale ad ω, ma sarebbe di segno contrario, il che vorrà dire che in questo caso l'atomo circolerà in verso opposto colla medesima velocità $2\pi \frac{a}{\tau}$.

Quest'analisi concorre dunque a comprovare quello che si è detto nella Lezione XXIV, che due movimenti vibratorii rettilinei d'un'ampiitudine $2a$, eguali, ma ad angolo retto fra loro e con una differenza di $\frac{1}{4}$ di fase si compongono in un movimento circolare colla velocità $2\pi \frac{a}{\tau}$. Il movimento circolare sarà diretto verso la semiperiferia alla destra dell'atomo, nell'istante che stesse per muoversi da A per andare verso il centro C, obbedendo alla sola azione del primo raggio, se questo raggió precederà l'altro d'un quarto d'ondulazione, e sarà diretto verso la semiperiferia alla sinistra, se seguirà il secondo raggio della stessa quantità.

3. Passiamo a considerare in vece due movimenti circolari concentrici, con velocità uniformi ed eguali, ma percorrenti la circonferenza

in direzione contraria. Contiamo il tempo dall' istante in cui questi due movimenti s' incontrano sull' asse $C\Upsilon$, fig. 153 *bis*, ed investono l' atomo d' etere ivi situato con velocità eguali e contrarie, il qual asse chiamasi appunto *asse d' incrociamento*. Riferendo i movimenti dell' atomo a quest' asse, gli angoli che farebbero con esso i raggi del circolo condotti ai punti ove si troverebbe l' atomo se obbedisse separatamente all' uno od all' altro dei due movimenti circolari sarebbero espressi dai due valori di ω ed ω' dati dalle formole (2), (3). Conducendo un piano $\Omega C \Omega'$ perpendicolare a quello la cui traccia è $\Upsilon C \Upsilon'$, le distanze, alle quali sarebbe trasferito l' atomo dalle tracce di questi due piani, pel solo primo movimento, sarebbero espresse rispettivamente da

$$a \cos \omega \quad ; \quad a \sin \omega ;$$

e quelle a cui si troverebbe trasportato pel solo secondo movimento, da

$$a \cos \omega' \quad ; \quad a \sin \omega'.$$

Ora il luogo a cui deve trovarsi realmente l' atomo, essendo pel principio della coesistenza dei piccoli movimenti, quello nel quale si troverebbe se i due movimenti operassero assieme senza alterarsi reciprocamente, chiamando x ed y le distanze dell' atomo dai due detti piani, si avrà

$$(4) \qquad \begin{aligned} x &= a\,(\cos \omega + \cos \omega') \\ y &= a\,(\sin \omega + \sin \omega'). \end{aligned}$$

Se sostituiamo per ω ed ω' i loro valori (2), (3) risulta evidentemente

$$x' = 2a \cos 2\pi \frac{t}{\tau} \quad ; \quad y' = 0.$$

La distanza y' dell' atomo dall' asse $\Upsilon C \Upsilon'$ sarà dunque costantemente nulla, e perciò l' atomo si muoverà lungo quest' asse; la prima equazione poi confrontata colla formola dell' articolo 8 della Lezione XXVI ci mostra che questo movimento consisterà in una vibrazione rettilinea il cui periodo sarà τ, e la semi-amplitudine $2a$. Un atomo investito da due movimenti circolari eguali e contrarii sembrerà dunque come mosso da un solo raggio che fosse polarizzato rettilineamente in un piano perpendicolare all' asse d' incrociamento.

4. Quando i due movimenti circolari invece di rimanere nello stesso piano si propagassero, e passassero ad agitare successivamente degli atomi situati in piani diversi, giungerebbero ad investire un atomo posto su d' un piano alla distanza s dal piano d' origine, ove è succeduto l' incrociamento, dopo un tempo θ dato dall' equazione

$$\theta = \frac{s}{V},$$

V essendo la velocità di propagazione. In questo frattempo i due movimenti avrebbero girato intorno all'asse di propagazione uno in un verso l'altro nel verso opposto per un arco corrispondente all'angolo

$$2\pi \frac{\theta}{\tau} = 2\pi \frac{s}{V\tau} = 2\pi \frac{s}{\lambda} ;$$

dinotando con λ, (1), la lunghezza delle ondulazioni dei due raggi polarizzati ad angolo retto, differenti di un quarto d'ondulazione dai quali può concepirsi generato ciascuno dei due movimenti circolari.

Volendo contare il tempo t dall'istante in cui i due movimenti circolari, partiti dal piano d'incrociamento, arrivano al piano alla distanza s, si avrebbe per l'espressione degli angoli ω ed ω' dopo un tempo qualunque t,

$$\omega = 2\pi \frac{s}{\lambda} + 2\pi \frac{t}{\tau} \quad ; \quad \omega' = -2\pi \frac{s}{\lambda} - 2\pi \frac{t}{\tau}$$

e sostituendo questi valori nelle formole (4), che sussistono anche per questo caso, si troverebbe

$$x' = 2a \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{s}{\lambda}\right) \quad , \quad y' = 0 .$$

Prendendo per n il numero intero che nasce dalla divisione di s per λ, di modo che sia $\frac{s}{\lambda} = n + \frac{f}{\lambda}$, e cambiando t in $t - \left(n + \frac{f}{\lambda}\right) t$, valore di x' diverrà

$$x' = 2a \cos 2\pi \frac{t}{\tau} :$$

dal che si vede che un atomo nel piano s al partire dal tempo $\left(n + \frac{f}{\lambda}\right) \tau$, vale a dire tosto che è investito d'ambedue i movimenti circolari, farà le sue vibrazioni rettilinee affatto eguali a quelle dell'atomo nel piano d'origine, talchè l'atomo che si considera sembrerà pure agitato da un raggio polarizzato rettilineamente in un piano perpendicolare a quello d'incrociamento.

5. Non del tutto eguale sarebbe il fenomeno se i due raggi polarizzati ad angolo retto con una differenza di fase di un quarto d'ondulazione che producono il primo movimento circolare, si propagassero con una velocità V differente dalla velocità V' colla quale si propagassero i due raggi che producono il secondo movimento circolare. In questo caso anche i due movimenti circolari si propagherebbero colle rispettive velocità V e V', ed i tempi θ, e θ' dopo i quali giungereb-

(1) Lez. XXVI, art. 5, formola (1).

bero al piano situato alla distanza s, sarebbero

$$\theta = \frac{s}{V} \quad ; \quad \theta' = \frac{s}{V'} .$$

Quindi gli archi che ciascuno di questi movimenti avrebbe percorso durante questi tempi sarebbero

$$2\pi\frac{\theta}{\tau} = 2\pi\frac{s}{V\tau} = 2\pi\frac{s}{\lambda} \quad , \text{e} \quad 2\pi\frac{\theta'}{\tau} = 2\pi\frac{s}{V'\tau} = 2\pi\frac{s}{\lambda'} ,$$

λ' dinotando le lunghezze delle ondulazioni dei due raggi che compongono il secondo movimento circolare.

Contando ancora il tempo dall'istante in cui i due movimenti che consideriamo sono giunti al piano s, gli angoli totali ω ed ω' che essi hanno percorso dalla loro origine, quando erano sulla linea d'incrociamento sino alla fine del tempo t, saranno dati da

$$\omega = 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{s}{\lambda}\right) \quad , \text{ed} \quad \omega' = 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{s}{\lambda'}\right) ;$$

e le formole (4) che danno le distanze x, y di un atomo contemporaneamente investito dai due movimenti, diverranno per la sostituzione di questi valori (1)

$$x = 2a\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right)\frac{s}{2}\right)\cos\pi\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)s$$

$$y = 2a\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right)\frac{s}{2}\right)\sin\pi\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)s.$$

Da queste formole si ricava

$$y = x\tan\pi\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)s.$$

Se si conduce nna retta CK che faccia colla $C\Upsilon$ un angolo eguale a $\pi\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)s$, e la cui tangente sia rappresentata nella figura da Tt, e si traduce l'equazione precedente nella proporzione

$$1 : \tan.\pi\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)s :: x : y;$$

si vede che preso per x un valore qualnnque CP, il valore y eguale a CQ che si dedurrà da qnesta proporzione sarà sempre tale che anderà a terminare in un punto Q situato sulla linea CK (2): dunque

(1) Legendre Trig. art. XXVIII.
(2) Legendre. Geom. Lib. III. prop. XV. coroll. I.

l'atomo che consideriamo si troverà costantemente su questa linea, e vibrerà rettilineamente. La distanza dal centro C a cui si troverà l'atomo sarà data da

$$d = \sqrt{x^2 + y^2},$$

e sostituendo per x ed y i premessi valori, sarà espressa per un tempo qualunque da

$$d = 2a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right)\frac{s}{2}\right)$$

e ponendo $\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right)\frac{s}{2} = n + \frac{f}{2(\lambda + \lambda')}$, e cambiando t in $t - \left(n + \frac{f}{2(\lambda + \lambda')}\right) T$, sarà data da

$$d = 2a \cos 2\pi \frac{t}{T}:$$

pel che conchiuderemo, come precedentemente, che l'atomo sul piano alla distanza s investito dai due movimenti circolari farà delle vibrazioni rettilinee con un periodo di tempo T e con una semi-amplitudine $2a$. Quest'atomo apparirà dunque ancora agitato come se si trovasse sul passaggio di un solo raggio polarizzato rettilineamente, ma il piano di vibrazione invece di conservarsi, come prima, nel piano dato della traccia $C\Upsilon$, avrà cambiato di posizione, e sarà rappresentato dalla traccia CK, che fa colla prima un angolo

$$A = \pi \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) s.$$

Contando gli angoli positivamente nel verso in cui circola il primo movimento, quest'angolo sarà positivo, e starà dalla parte della $C\Upsilon$ verso cui è diretto il primo movimento, nell'atto d'incrociamento, o vero sarà negativo e starà dalla parte opposta, secondo che λ sarà $< \lambda'$, o viceversa. Dunque il piano di polarizzazione sembrerà aver rotato dalla parte verso cui circola il movimento circolare che si propaga meno velocemente, perchè le lunghezze delle ondulazioni λ e λ' sono per uno stesso colore rispettivamente proporzionali alle velocità di propagazione V e V'.

6. I risultamenti ora esposti ci forniscono il mezzo per farci un'idea del modo con cui la supposizione di Fresnel per spiegare i fenomeni della rotazione del piano di polarizzazione dei raggi che percorrono il cristallo di rocca parallelamente al suo asse ottico può venire effettuata in natura. Perciò basta ammettere che un raggio di luce polarizzata rettilineamente, penetrando nel cristallo parallelamente all'asse ottico, sia sempre decomposto in due raggi eguali polarizzati ad angolo retto

fra loro, ciascnno dei quali si suddivida in due per mezzo di una differente velocità di propagazione, e della differenza di fase d'un quarto d'ondulazione.

Per spiegarci con maggior chiarezza, indicheremo con x ed x' le distanze delle quali un atomo si trova scostato da uno dei due piani di polarizzazione per le vibrazioni recate dai due raggi polarizzati in questo piano, e con y ed y' le distanze dall'altro piano alle quali lo stesso atomo è trasportato dalle vibrazioni degli altri due raggi. Queste distanze potranno essere rappresentate rispettivamente da

$$x = a \cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{1}{8}\right) \quad , \quad x' = a \cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{1}{8}\right)$$

$$y = a \cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{1}{8}\right) \quad , \quad y' = a \cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{1}{8}\right).$$

I due raggi corrispondenti alle escursioni x ed y' si propaghino entro il cristallo colla velocità V, e quelle corrispondenti alle escursioni x' ed x colla velocità V'.

Dai due primi raggi che hanno una stessa velocità di propagazione, ma che sono polarizzati ad angolo retto fra loro colla differenza di fase d'un quarto d'ondulazione, si produrrà nn movimento circolare diretto in un verso che si propagherà colla velocità V, e dai due altri si produrrà un secondo movimento, diretto in verso contrario, che si propagherà colla velocità V'. Questi movimenti al penetrare del raggio incidente nel cristallo avranno l'asse d'incrociamento nel piano di polarizzazione del raggio stesso; dopo che essi avranno percorsa la grossezza s del cristallo, all'nscire anderanno agitando, come si è visto, gli atomi d'etere come se fossero mossi da nn solo raggio polarizzato rettilineamente, ma il cui piano di polarizzazione, farà col suddetto asse d'incrociamento, o col piano primitivo di polarizzazione un angolo A espresso da

$$A = \pi\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) s = \frac{\pi}{\tau}\left(\frac{1}{V} - \frac{1}{V'}\right) s :$$

e questo movimento si propagherà in seguito nell'aria, conservando lo stesso piano di polarizzazione, ciò che è il fenomeno che si osserva, poichè si trova appunto che il piano di polarizzazione ha rotato d'nn angolo proporzionale alla grossezza s del cristallo, come vien dato dalla formola precedente.

Queste conclusioni sono complete pei raggi che percorrono esattamente delle linee parallele all'asse ottico: per quelli che sono un po obliqui a questa direzione, la differenza di fase non è più d'un quarto di vibrazione, o la differenza di velocità di propagazione è minore, per cui il movimento prodotto da ciascuna coppia di raggi diviene ellittico, ed il fenomeno si modifica; a poco a poco, crescendo l'obli-

quità dei raggi la differenza di fase o della velocità di propagazione diviene nulla, e si hanno i fenomeni ordinarii spiegati nella Lezione precedente. Vedasi nna Memoria del Sig. Airy nelle Transazioni di Cambridge an. 1831.

7. La legge scoperta dal Sig. Biot per la variazione dell'angolo di rotazione del piano di polarizzazione corrispondente ai raggi di diverso colore, che abbiamo riferita all'articolo 3 di questa Lezione, facendoci vedere che quest'angolo varia prossimamente in ragione inversa dei quadrati delle lunghezze delle ondulazioni degli stessi colori nel vôto, ci somministra il mezzo di riconoscere in che modo varia la differenza delle velocità inverse di propagazione, o sia il valore di $\frac{1}{V} - \frac{1}{V'}$, passando da nn colore all'altro. Infatti ritenendo le denominazioni precedenti, e quelle degli articoli 3 e 6 del testo, per l'eguaglianza del due valori di A si dovrà, avere

$$\frac{\pi}{\tau}\left(\frac{1}{V_c} = \frac{1}{V'_c}\right) = \frac{\alpha}{l^2_c}.$$

Ma, dinotando con V_0 la velocità di propagazione del raggio di luce nel vôto, deve essere $V_0 \tau = l_c$, (1), dunque rimarrà

$$\frac{1}{V_c} - \frac{1}{V'_c} = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{1}{V_0} \cdot \frac{1}{l_c};$$

perciò la differenza della velocità inversa dei due sistemi di raggi componenti i movimenti circolari deve variare in ragione inversa delle lunghezze delle ondulazioni nel vôto dei raggi del colore corrispondente.

Poscritto. La proprietà di far rotare il piano di polarizzazione non appartiene, come vien detto nel testo, al solo quarzo, ma a varie altre sostanze, e per tutte queste sostanze si verifica pure, prossimamente, la legge suddetta fra le rotazioni dei piani di polarizzazione dei raggi di diverso colore. Il solo acido tartarico presenta un'eccezione allorchè è diluito nell'acqua, nell'alcool, nello spirito pirolegnoso puri o mescolati cogli acidi solforico ed idroclorico, la quale eccezione è parimenti stata segnalata dallo stesso Sig. Biot. In queste soluzioni i raggi verdi gli hanno offerto una rotazione maggiore, come si può vedere nella seguente tavola

(1) Lez. XXVI art. 5, formula (1).

SOLUZIONI	PROPORZIONI DEI COMPONENTI			Densità della soluzione	Temperatura	ROTAZIONI DEI RAGGI DEI COLORI EC.			VALORI di Γ
	Acido tartarico	Acqua	Acido solforico			rosso A	verde A_1	violetto A_2	
1.ma	0,464	0,536	0,000	1,244	16°,0	18°,43	19°,62	9°,90	0,394
2.da	0,152	0,583	0,265	1,259	16 ,5	6 ,04	6 ,02	2 ,83	0,434
3.za	0,122	0,603	0,275	1,248	15 ,8	5 ,01	5 ,60	2 ,94	0,362
4.ta	0,093	0,623	0,284	1,237	15 ,0	3, 72	4, 08	2 ,13	0,374
5.ta	0,124	0,522	0,354	1,421	14, 5	2, 20	0, 55	—4 ,95	0,418

Le rotazioni dei piani di polarizzazione dei diversi colori osservati con queste soluzioni si pongono però d' accordo colle teorie precedenti, col supporre che $\frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{l_c}$ sia soltanto il primo termine dello sviluppo della funzione $\frac{V_0}{V_c} - \frac{V_0}{V_c'}$, e che si abbia in generale

$$\frac{V_0}{V_c} - \frac{V_0}{V_c'} = \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{l_c} + \frac{\beta}{\pi} \frac{1}{l_c^3} + \text{ec.}$$

il coefficiente β del secondo termine acquistando un valore sensibile per le dette soluzioni.

Per verificarlo osservisi che per mezzo di quest' espressione i valori degli archi di rotazione A, A_1, A_2 corrispondenti ai tre colori diversi osservati, si possono mettere sotto la forma

$$A = \frac{\pi}{l} \left(\frac{V_0}{V} - \frac{V_0}{V'} \right) s = \left(\frac{\alpha}{l^2} + \frac{\beta}{l^4} \right) s,$$

$$A_1 = \frac{\pi}{l_1} \left(\frac{V_0}{V_1} - \frac{V_0}{V_1'} \right) s = \left(\frac{\alpha}{l_1^2} + \frac{\beta}{l_1^4} \right) s,$$

$$A_2 = \frac{\pi}{l_2} \left(\frac{V_0}{V_2} - \frac{V_0}{V_2'} \right) s = \left(\frac{\alpha}{l_2^2} + \frac{\beta}{l_2^4} \right) s:$$

dalle quali si deduce

$$l^2 A - l_1^2 A_1^2 = \beta \left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{l_1^2} \right) s \quad , \quad l^2 A - l_2 A_2^2 = \beta \left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{l_2^2} \right) s$$

e quindi

$$(a)\qquad \frac{l^2 A^2 - l_1^2 A_1^2}{l^2 A^2 - l_2^2 A_2^2} = \frac{\frac{1}{l^2} - \frac{1}{l_1^2}}{\frac{1}{l^2} - \frac{1}{l_2^2}}.$$

Se ora s'introducono in questa equazione i valori di A, A_1, A_2 citati nella surriferita tavola, e si prendono per le lunghezze delle ondulazioni nel vòto corrispondenti ai raggi rossi, verdi e violetti i seguenti valori, espressi in milionesimi di millimetro,

$$l = 630 \quad , \quad l_1 = 511 \quad , \quad l_2 = 420\,;$$

si trovano pel primo membro i numeri dati nell'ultima colonna della tavola col titolo di valori di Γ, mentre pel secondo membro si ottiene il numero

$$\frac{\frac{1}{l^2} - \frac{1}{l_1^2}}{\frac{1}{l^2} - \frac{1}{l_2^2}} = 0{,}413.$$

I valori di Γ che oscillano tutti in più od in meno intorno a quest'ultimo numero come loro valor medio, possono considerarsi come eguali fra loro, poichè le piccole differenze possono essere attribuite alla grande difficoltà d'ottenere dello misure precise degli angoli di rotazione. Si vede dunque che anche per queste soluzioni vale la stessa legge del fenomeno, e che se essa si presenta sotto un aspetto più semplice negli altri casi, ciò succede soltanto perchè il valore di β è per questi casi insensibile.

La formola (a) è stata data dal Sig. Cauchy, come risultante da alcune sue teorie ottico-meccaniche.

Il Sig. Biot ha anche stabilito il principio che l'angolo di rotazione del piano di polarizzazione è proporzionale al numero dei gruppi molecolari delle sostanze dotate di poter rotativo che si trovano sul cammino del raggio di luce, dal che pare potersi conchiudere che il detto movimento di rotazione è l'effetto di un'azione molecolare. Secondo questo principio, dinotando con ε la parte proporzionale in peso della sostanza dotata di poter rotativo componente una soluzione, con δ la densità della medesima, con L la lunghezza del cannello ripieno della stessa soluzione, lungo il quale è trasmesso il raggio di cui si osserva la rotazione del piano di polarizzazione, il quoziente dell'arco A che misura questa rotazione diviso pel prodotto $\varepsilon\,\delta\,L$ deve essere una quantità costante. Ponendo

$$\alpha = \frac{A}{\varepsilon\,\delta\,L},$$

il suddetto fisico ha chiamato la quantità α *poter rotativo specifico molecolare* della sostanza disciolta. Questa quantità o poter rotativo specifico si trova infatti costante per le soluzioni delle sostanze citate nel testo.

Quando le soluzioni sono fatte coll' acido tartarico e con acqua pura o mista, la legge precedente soffre delle modificazioni. Se si calcolano per esempio i valori di α per le cinque soluzioni surriferite, corrispondenti ai raggi rossi si trova

	SOLUZIONI				
	1.ma	2.da	3.za	4.ta	5.ta
Valori di α pei raggi rossi	6°,927	6°,280	6°,548	6°,482	2°,490

Dal confronto di questa tavola colla precedente si vede che il potere specifico rotativo dell' acido tartarico è variabile colla quantità d' acqua e colla quantità d' acido solforico che entrano nella soluzione, per cui i gruppi molecolari devono risguardarsi in questi casi come di specie diversa.

Secondo le esperienze istituite dallo stesso fisico, il poter rotativo specifico delle soluzioni d' acido tartarico in acqua pura, senza mescolanza d' acidi, cresce entro certi limiti, proporzionalmente alla quantità d' acqua contenuta nella soluzione, e cresce anche colle temperature. Dinotando con e, la parte d' acqua proporzionale in peso componente la soluzione, talchè sia $e + \varepsilon = 1$, il poter specifico sarebbe dato da

$$\alpha = P + Qe.$$

I coefficienti P e Q sono variabili colla temperatura, ma il Sig. Biot ha trovato che, fra 6 e 26 gradi del termometro centigrado, si può risguardare Q come costante, ed assumere

$$P = \frac{0^\circ{,}12410\ (t-16)}{1 + 0{,}01702\ (t-16)} - 0^\circ{,}7432 \qquad , \qquad Q = 14^\circ{,}3134\ ;$$

t dinotando la temperatura della soluzione espressa in gradi del detto termometro.

Queste leggi, che sono state confermate con un gran numero di soluzioni d' acido tartarico in acqua pura, concordano anche coi risul-

tamenti delle soluzioni miste sopra riferite ; si scorge in fatti dai precedenti valori di α che più grande è la quantità d'acqua contenuta nella soluzione, maggiore è il potere rotativo molecolare della medesima ; ma questo potere è poi diminuito dalla presenza dell'acido solforico in una proporzione tanto maggiore, quanto più grande è la quantità di quest'acido rispetto a quella dell'acqua, per la ragione che la grande affinità dell'acido solforico per l'acqua sottrae una parte di quella della soluzione dal concorrere all'effetto che produce per far crescere il poter rotativo dell'acido tartarico. Vedansi le Memorie citate alla fine della Lezione.

NOTE ALLA LEZIONE XXXVIII.

NOTA I.

Equazione fra le distanze conjugate dei fuochi di uno specchio (Art. 3).

Nella figura 94 possiamo considerare IKC, come esterno al triangolo LIK, ed interno al triangolo KID, il che ci dà le equazioni

$$IKC = ILC + LIK \quad ; \quad IKC = I\Delta C - KI\Delta.$$

Ma per la legge della riflessione $LIK = KI\Delta$ dunque sommando queste due equazioni si avrà

$$2IKC = ILC + I\Delta C.$$

Il punto I essendo supposto poco lontano da C, gli angoli che compongono quest'equazione saranno piccoli, e proporzionali alle loro tangenti. Considerando IC come una piccola retta si potrà quindi assumere

$$IKC = \frac{IC}{KC} \quad ; \quad ILC = \frac{IC}{LC} \quad ; \quad I\Delta C = \frac{IC}{\Delta C}.$$

Quindi, sostituendo questi valori nell'equazione precedente, e togliendo il numeratore comune, sarà

$$\frac{2}{KC} = \frac{1}{LC} + \frac{1}{\Delta C};$$

o vero facendo uso delle denominazioni del testo

$$\frac{2}{\rho} = \frac{1}{D} + \frac{1}{\Delta}.$$

NOTA II.

Formola per le distanze focali conjugate delle lenti. (Art. 9).

Tratteremo la questione di determinare il corso di un raggio di luce che attraversa una lente in un modo alquanto generale, il che ci fornirà una formola nuova che sarebbe atta ad esaminare gli effetti dell'aberrazione di sfericità (1); infine, limitando la formola al caso che il raggio che si considera diverga poco dall'asse, dedurremo la rela-

(1) Lez. XL art. 12.

zione fra le distanze focali conjugate di una lente, che è citata nel testo.

Sia $C\,C_{,}'$, fig. 154, l'asse di una lente convesso convessa; siano C, e $C_{,}'$ i centri delle due superficie sferiche $A\,I\,B$, $A\,I_{,}B$; L il punto in cui il raggio incidente taglia l'asse. Questo raggio dopo essere stato rifratto in I dalla prima lente, ed aver preso la direzione $I\,I_{,}$, incontri in $I_{,}$ la seconda superficie, e rifrangendosi una seconda volta vada ad incontrare l'asse $C\,C'$ prolungato nel punto l: e cerchiamo l'espressione della distanza di questo punto dalla lente.

Supposto che $I\,H$ sia il prolungamento della perpendicolare $C\,I$ al punto I della lente, la legge di Snellius ci darà, per la rifrazione del raggio sulla superficie $A\,I\,B$, l'equazione

$$(1) \qquad \sin H\,I\,L = n \sin I_{,}\,I\,C\,;$$

n essendo l'indice di rifrazione dall'aria nel vetro.

Ora le note formole della Trigonometria (1) ci somministrano

$$\sin H\,I\,L = \sin L\,I\,C = \frac{C\,L}{I\,L} \sin I\,C\,L = \frac{C\,L \sin I\,C\,L}{\left\{\overline{C\,L}^2 + \overline{C\,I}^2 - 2\,C\,L\,.\,C\,I\,.\cos I\,C\,L\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sin L_{,}\,I\,C = \sin C\,I\,L_{,} = \frac{C\,L_{,}}{I\,L_{,}} \sin I\,C\,L_{,} = \frac{C\,L_{,} \sin I\,C\,L_{,}}{\left\{\overline{C\,L_{,}}^2 + \overline{C\,I}^2 - 2\,C\,L_{,}\,.\,C\,I\,.\cos I\,C\,L_{,}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

Dinotiamo con D la distanza $E\,L$ del punto L dalla lente, con d la distanza $E\,L_{,}$, ove il raggio rifratto prolungato taglia l'asse della medesima, con ρ il raggio $C\,I$ di sfericità della lente, e con e l'angolo $I\,C\,L$, che il raggio $C\,I$ fa coll'asse, e sostituiamo i valori di $\sin H\,I\,L$, $\sin I_{,}\,I\,C$ espressi con queste denominazioni nell'equazione (1) avremo

$$\frac{D + \rho}{\left\{(D+\rho)^2 + \rho^2 - 2\,\rho\,(D+\rho)\cos e\right\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{n\,(d+\rho)}{\left\{(d+\rho)^2 + \rho^2 - 2\,\rho\,(d+\rho)\cos e\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Sostituendo $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}e$ a $\cos e$, è facile di vedere che a quest'equazione si può dare la forma

$$\frac{\frac{1}{\rho} + \frac{1}{D}}{\left\{1 + \frac{1}{D}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{D}\right) 4\,\rho^2 \sin^2\frac{1}{2}e\right\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{n\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{d}\right)}{\left\{1 + \frac{1}{d}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{d}\right) 4\,\rho^2 \sin^2\frac{1}{2}e\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

Se si pone

(1) Legendre. Trig. art. XLIV e XLV.

$$(2)\qquad \omega = n\,\frac{\left\{1+\frac{1}{D}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{D}\right)4\rho^2\sin^2\tfrac{1}{2}e\right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{1+\frac{1}{d}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{d}\right)4\rho^2\sin^2\tfrac{1}{2}e\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

la stessa equazione potrà essere rappresentata da

$$(3)\qquad \frac{1}{\rho}+\frac{1}{D}=\omega\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{d}\right).$$

Facciamo un calcolo analogo per la rifrazione alla seconda superficie Il raggio $I\,I_{,}$, incontrando questa superficie si rifrangerà al sortire nell'aria, e per la legge di Snellius si avrà

$$(4)\qquad n\sin I\,I_{,}C_{,}=\sin H_{,}I_{,}l.$$

Considerando poi i triangoli $L_{,}I_{,}C_{,}$, $l\,I_{,}C_{,}$ si dedurrà

$$\sin I\,I_{,}C_{,}=\frac{L_{,}C_{,}}{I_{,}L_{,}}\sin I_{,}C_{,}L_{,}=\frac{L_{,}C_{,}\sin I_{,}C_{,}L_{,}}{\left\{\overline{L_{,}C_{,}}^2+\overline{I_{,}C_{,}}^2+2\,L_{,}C_{,}\,.\,I_{,}C_{,}\cos I_{,}C_{,}E_{,}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sin H_{,}I_{,}l=\sin l\,I_{,}C_{,}=\frac{l\,C_{,}}{l\,I_{,}}\sin I_{,}C_{,}l=\frac{l\,C_{,}\sin I_{,}C_{,}l}{\left\{\overline{l\,C_{,}}^2+\overline{I_{,}C_{,}}^2-2\,l\,C_{,}\,.\,I_{,}C_{,}\cos I_{,}C_{,}l\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Porremo a similitudine di quanto si è fatto prima

$$E_{,}L_{,}=d'\quad,\quad I_{,}C_{,}=\rho'\quad,\quad E_{,}l=\Delta\quad,\quad I_{,}C_{,}L_{,}=e';$$

e sostituendo i rispettivi valori dei seni nell'equazione (4) ricaveremo

$$\frac{n\,(d'-\rho')}{\left\{(d'-\rho')^2+\rho'^2+2\rho'(d'-\rho')\cos e'\right\}^{\frac{1}{2}}}=\frac{\Delta+\rho'}{\left\{(\Delta+\rho')^2+\rho'^2-2\rho'(\Delta+\rho')\cos e'\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

Quindi colle medesime riduzioni praticate sopra avremo

$$\frac{n\left(\frac{1}{\rho'}-\frac{1}{d'}\right)}{\left\{1-\frac{1}{d'}\left(\frac{1}{\rho'}-\frac{1}{d'}\right)4\rho'^2\sin^2\tfrac{1}{2}e'\right\}^{\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{\rho'}+\frac{1}{\Delta}}{\left\{1+\frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{\rho'}+\frac{1}{\Delta}\right)4\rho'^2\sin^2\tfrac{1}{2}e'\right\}^{\frac{1}{2}}};$$

formola che colla posizione di

$$(5)\qquad \omega'=n\,\frac{\left\{1+\frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{\rho'}+\frac{1}{\Delta}\right)4\rho'^2\sin^2\tfrac{1}{2}e'\right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{1-\frac{1}{d'}\left(\frac{1}{\rho'}-\frac{1}{d'}\right)4\rho'^2\sin^2\tfrac{1}{2}e'\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

può scriversi come segue

$$\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\Delta} = \omega' \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{d'}\right).$$

Sommando questa formola coll' analoga (3) si ottiene

$$(6) \qquad \frac{1}{D} + \frac{1}{\Delta} = (\omega - 1)\frac{1}{\rho} + (\omega' - 1)\frac{1}{\rho'} + \frac{\omega}{d} - \frac{\omega'}{d'}.$$

Quest'equazione, nella quale niente è stato trascurato, può prestarsi facilmente al calcolo del corso di un raggio di luce che attraversi una lente, senza che l'apertura di questa sia limitata da un piccolo numero di gradi.

Si può osservare che $2\rho \sin \frac{1}{2} e$, $2\rho_{,} \sin \frac{1}{2} e'$, rappresentano le corde che uniscon rispettivamente il punto E col punto I, ed il punto E' col punto I'. Quando i punti I ed I' sono assai vicini in confronto delle distanze EL ed $E_{,}l$ e dei raggi CE, $C_{,}E_{,}$ di curvatura della superficie delle lenti, i termini moltiplicati pei quadrati di queste corde sono trascurabili, e le due espressioni di ω ed ω' si riducono a

$$\omega = n = \omega'.$$

Essendo poi $d' = d - EE_{,}$, se si trascura la grossezza della lente, si potrà assumere $d' = d$, e la precedente equazione diviene quella del testo

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{\Delta} = (n - 1)\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right).$$

Siccome da questa equazione sono scomparsi i valori di e, ed e', la relazione fra D e Δ che essa somministra viene ad essere indipendente dalla distanza dall'asse della lente dei punti I ed I' pei quali passa il raggio, purchè queste distanze siano piccole. Da ciò ne segue che tutti i raggi, che partono da uno stesso punto o fuoco L con una piccola inclinazione all'asse, vanno tutti molto prossimamente a concentrarsi in un altro punto l, che ne è il fuoco conjugato.

NOTA III.

Sui fuochi conjugati degli assi secondarii (art. 13).

Per dimostrare questa proposizione, sia $L'\Lambda'$, fig. 106, l'asse secondario ed I il punto d'incidenza che supporremo, per approssimazione, trasportato nel mezzo della lente, trascurando la sua grossezza. Prolunghiamo il raggio IL' fino ad incontrare l'asse principale in l: potremo considerare il raggio $L'I$ come partito dal punto l, ed in questo caso sappiamo (1) che va a tagliare l'asse in un altro punto λ, tale, che dette d e δ le distanze Ol, $O\lambda$ si ha

(1) Art. 9.

$$(1) \qquad \frac{1}{d} + \frac{1}{\delta} = \frac{1}{F}.$$

Pel punto L' conduciamo la retta $L'K$ parallela ad $I\lambda$; dalle due coppie di triangoli simili $lL'K$, $lI\lambda$; e KOL'; $\lambda o \Lambda'$ si avrà

$$IL' : L'K :: lI : I\lambda$$

$$L'K : OL :: \lambda\Lambda' : O\Lambda:$$

e quindi moltiplicando le due proporzioni

$$IL' : OL :: lI \times \lambda\Lambda' : I\lambda \times O\Lambda,$$

dalla quale si ricava

$$IL' \times I\lambda \times O\Lambda = OL \times lI \times \lambda\Lambda'.$$

Ma, per essere supposta $L'\Lambda'$ assai poco inclinata sopra $l\Lambda$, si possono sostituire le rette lL, $O\lambda$, lO, $\lambda\Lambda$ ad lL', $I\lambda$, lI, $\lambda\Lambda$ dunque sarà

$$lL \times O\lambda \times O\Lambda = OL \times lO \times \lambda\Lambda.$$

Se quindi si pone $OL = D$, $O\Lambda = \Lambda$, $lO = d$, $O\lambda = \delta$, e si osserva che $lL = d - D$, $\lambda\Lambda = \Lambda - \delta$, dividendo tutta l'equazione per $d \times D \times \delta \times \Lambda$ si avrà

$$\frac{1}{D} - \frac{1}{d} = \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\Delta}$$

o vero per motivo dell'equazione (1)

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{F}.$$

Nota IV.

***Sulla grandezza dell'angolo visuale sotto cui si scorge un'oggetto con una lente* (Art. 14).**

L'angolo visuale sotto cui è vista l'immagine ii' dell'oggetto oo' potendo per la sua piccolezza essere assunto eguale alla sua tangente, sarà dato, fig. 110, da

$$\text{ang. visuale} = \frac{ii'}{Pi}.$$

Ma i due triangoli simili Coo', Cii' ci danno

$$Co : Ci :: oo' : ii',$$

e quindi

$$ii' = \frac{Ci}{Co}\, oo';$$

dunque sarà

$$\text{ang. visuale} = \frac{Ci}{Pi} \cdot \frac{oo'}{Co};$$

o vero sostituendo le denominazioni impiegate nel testo,

$$\text{ang. visuale} = \frac{\Delta}{d+\Delta} \cdot \frac{O}{D} = \frac{1}{1+\frac{d}{\Delta}} \cdot \frac{O}{D}.$$

Osservando che, nel caso della fig. 110, Δ e negativo, (1), e sostituendo il valore di $\frac{1}{\Delta}$ che dà la formola (1)' si avrà

$$\text{ang. visuale} = \frac{1}{1-d\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{D}\right)} \cdot \frac{O}{D}.$$

NOTA V.

Sulla determinazione del campo visibile con una lente (art. 15).

Le due coppie di triangoli simili $o\,C\,o'$, $i\,C\,i'$; e $C\,P'\,S$, $i\,P'\,i$, ci danno, fig. 111,

$$Co : Ci :: oo' : ii_, \quad ; \quad cS : ii' :: P'c : P'i.$$

Impiegando le denominazioni del testo l'ultima proporzione diviene

$$a - p : ii_, :: d : d + \Delta$$

dalla quale si ricava

$$ii_, = a\left(1 + \frac{\Delta}{d}\right) - p\left(1 + \frac{\Delta}{d}\right).$$

Ma dalla prima proporzione, osservando che $\frac{oo'}{Co}$ esprime la semigrandezza angolare del campo, si ha

$$\tfrac{1}{2}\,\text{campo} = \frac{ii_,}{Ci}\, Co = \frac{ii_, + PP'}{Ci}\, Co;$$

perciò sostituendo il valore precedente di $ii_,$, e facendo uso delle denominazioni del testo, sarà

(1) Art. 9.

$$\tfrac{1}{2}\ \text{campo} = a\left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{d}\right) D - \frac{p}{d} D:$$

quindi, osservando che nel caso della figura 111, Δ è negativo, e si ha $\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{D} - \frac{1}{F}$, risulterà

$$\tfrac{1}{2}\ \text{campo} = a\left(1 + \frac{D}{d} - \frac{D}{F}\right) - p\,\frac{D}{d}.$$

È evidente che per avere la metà del campo, corrispondente all'altra estremità p, della pupilla, fig. 111 bis, bisognerà cambiare in questa formola p in — p.

NOTE ALLA LEZIONE XL.

Nota I.

Sul campo del canocchiale galileano.

Sia i, fig. 122, il luogo ove l'obbiettivo formerebbe l'immagine del punto o. Questo punto, supposto assai lontano, sarà veduto attraverso al canocchiale per mezzo del pennello lucido $cjmk$, i cui raggi sortono dall'oculare tutti paralleli a Ci, raggio principale del pennello lucido $cjmk$. Suppongasi che il punto o sia così situato che il raggio Bc che entra per l'estremità B dell'obiettivo e sta sul contorno del pennello lucido $cjmk$, sia quello che passa per l'estremità p della pupilla; il punto o sarà in questo caso il più discosto dall'asse, e l'ultimo del campo ancor visibile con tutta la pupilla. Infatti un'altro punto o' più lontano dall'asse OAI, avendo la sua immagine formata dall'obbiettivo in un punto più lontano da I che non è i, il pennello corrispondente di luce s'abbasserebbe ancor più che non fa il pennello $cjmk$, ed il raggio estremo cj non passerebbe più per l'estremità p della pupilla, ma sì bene per un punto più interno, dimodochè l'estremità p della pupilla verrebbe ad essere priva della luce inviata da questo secondo punto. La condizione che determina la direzione del punto o ancor visibile con tutta la pupilla, facendo attenzione che $pq = Cc$, sarà dunque data da

$$Cc - Pq = Pp.$$

La considerazione dei triangoli simili iCc, iGB; CAG, CIi, assumendo IC ed IA, per approssimazione, eguali ad iC ed iG, ci darà

$$Cc = \frac{IC}{IA} GB = \frac{IC}{IA}(AB - AG) \quad , \quad AG = \frac{AC}{IC} . Ii :$$

e quindi usando delle denominazioni del testo

$$Cc = \frac{f}{F} A - h \frac{Ii}{IA}.$$

Inoltre i triangoli simili ICi, PCq danno

$$Pq = \frac{a}{f} Ii = \frac{aF}{f} . \frac{Ii}{IA} :$$

dunque facendo la sostituzione di questi valori nella prima equazione avremo

$$\frac{f}{F}A - h\frac{Ii}{IA} - \frac{aF}{f}\frac{Ii}{IA} = Pp.$$

Ma la ragione di $\frac{Ii}{IA}$ misura l' angolo visuale compreso tra il raggio diretto al punto o e l' asse del canocchiale, il qual angolo è la misura della metà del campo, e Pp è la semi-apertura p della pupilla, dunque sostituendo si ricaverà

$$\tfrac{1}{2}\text{ campo} = \frac{\frac{f}{F}A - p}{h + \frac{aF}{f}},$$

come nel testo.

Nota II.

Sul campo del canocchiale Kepleriano.

In questa specie di canocchiale si esige tanto per le condizioni nelle quali sono state dedotte le nostre formule, quanto per la comodità delle osservazioni, che l' occhio sia applicato a piccola distanza dall' oculare, la quale distanza supporremo minore della distanza focale principale del medesimo. In questo caso si prova facilmente che se il punto o, fig. 124, è tale che, conducendo pel bordo B' dell' obbiettivo alla sua immagine i il raggio $B'i$, questo raggio, rifratto dall' oculare, in c, e sortito parallelamente all' asse principale iCq, si pieghi in modo che percorrendo sul contorno del pennello lucido $cjmk$, passi per l' estremità p della pupilla, il punto o sarà al limite del campo ancor visibile colla pupilla intera. Infatti se immaginiamo un punto i' che sia l' immagine di un' altro punto o' più lontano dall' asse, che non è o, il punto q si eleverebbe sopra l' asse Ip di una quantità qq' minore di ii', per essere $CP < CI$, e viceversa il punto c si abbasserebbe di una quantità cc' maggiore di ii', per essere $B_1C > AI$, per cui la parallela condotta al nuovo asse principale dal punto c', sarebbe più bassa di prima e passerebbe per un punto interno della pupilla.

Il campo visibile coll' intiera pupilla sarà dunque dato dalla condizione.

$$(1) \qquad Cc + Pq = Pp,$$

pel motivo che $qp = Cc$.

Ora istituendo un calcolo analogo a quello che si è fatto pel canocchiale galileano si vedrà che

$$Cc = \frac{f}{F}A - h\frac{Ii}{IA}$$

$$Pq = \frac{aF}{f}\cdot\frac{Ii}{IA}.$$

Sostituendo questi valori nell'equazione (1) e facendo uso delle denominazioni del testo si deduce

$$\frac{Ii}{IA} = \frac{\frac{f}{F}A - p}{h - \frac{F}{f}a}.$$

La ragione di $\frac{Ii}{IA}$ è quella della tangente dell'angolo compreso fra l'asse del telescopio e la retta che dal centro dell'obbiettivo va al punto o il più lontano dallo stesso asse, ed ancor visibile coll'intera pupilla, il qual angolo è la misura della metà del campo, dunque sostituendo, per la sua piccolezza, l'angolo alla tangente, si avrà

$$\tfrac{1}{2}\text{ campo} = \frac{\frac{f}{F}A - p}{h - \frac{F}{f}a}.$$

Nota III.

Sul calcolo della distanza focale principale di un oculare composto.

Volendo riconoscere qual'è la distanza focale principale di una lente semplice, che applicata ad un telescopio potrebbe produrre lo stesso ingrandimento di un dato oculare composto si può procedere nel seguente modo.

Sia b fig. 126, un punto dell'immagine formata dall'obbiettivo, e b' il fuoco virtuale conjugato dei raggi partiti da quest'immagine dopo aver attraversata la prima lente; b' sarà anche il fuoco principale della seconda lente, onde i raggi che escono da essa siano paralleli. Ora ponendo $Ca = D$, $Ca' = \Delta$, $CC = h$, e chiamando f ed f' le due distanze focali principali delle due lenti, abbiamo le equazioni

$$(1) \quad \frac{1}{D} - \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{f} \quad ; \quad (2) \quad f' - \Delta = h;$$

si è dato a Δ il segno negativo secondo la regola esposta all'art. 9 della Lezione XXXVIII, perchè i due fuochi conjugati sono dalla stessa parte della lente.

Indicando con b e b' le distanze dall'asse ab ed $a'b'$ dei due fuochi conjugati, la similitudine dei triangoli bCa, $b'Ca'$ ci dà

$$(3) \quad \frac{b}{D} = \frac{b'}{\Delta}.$$

L'angolo visuale, v, sotto cui sarebbe veduta l'immagine ba dopo che i raggi hanno attraversato le due lenti sarebbe quindi espressa da

$$v = \frac{a' b'}{C a'} = \frac{b'}{f'}.$$

Una sola lente, che applicata direttamente all' immagine la facesse comparire sotto lo stesso angolo visuale, dovrebbe avere una distanza focale principale, φ, tale da soddisfare alla relazione

$$v = \frac{b}{\varphi}.$$

Paragonando i due valori di v, avremo l'equazione

$$\frac{b}{\varphi} = \frac{b'}{f'}.$$

Sostituendo per b' il valore che si ricava dalla (3) si ha

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{\Delta}{D} \cdot \frac{1}{f''};$$

ed eliminando $\frac{1}{D}$ coll' equazione (1), e poi Δ colla (2) si otterrà

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{f' + f'' - h}{f'} \cdot \frac{1}{f''}:$$

da dove, ponendo

$$\frac{f'}{f''} = \alpha \quad , \quad \frac{h}{f''} = \beta,$$

si dedurrà l' equazione del testo

$$(4) \qquad \varphi = f'' \frac{\alpha}{1 + \alpha - \beta}.$$

Un calcolo simile applicato al caso dell'oculare positivo fig. 127, osservando che, qualora si voglia intendere che D e Δ abbiano dei valori assoluti sempre positivi, le due equazioni (1) e (2) divengono in questo caso

$$\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{D} = \frac{1}{f'} \quad ; \quad \Delta + f'' = h;$$

conduce alla stessa equazione (4).

Oculari terrestri.

Il telescopio di Kepler fa vedere, come abbiamo detto, le immagini degli oggetti capovolte; quest' inversione è incomoda quando si guardano degli oggetti terrestri, per chi non si ha formato un' abitudine; e volendo evitare quest' incomodo e raddirizzare le immagini si fa uso di un' oculare composto col quale si viene a formare una se-

conda immagine inversa della prima e perciò diritta, il quale si chiama *un oculare terrestre*. Gli artisti costumano di fare quest' oculare riunendo i due oculari composti che abbiamo descritto nel testo. Il primo, quello verso la lente obbiettiva, è il positivo, ed il secondo, verso l'occhio, è il negativo. I tre quadri seguenti che si riferiscono alla figura 155 possono dare un' idea della lunghezza delle distanze focali delle lenti e della loro distribuzione.

Oculare terrestre di Ramsden				Oculare terrestre di Ramsden				Oculare terrestre di Fraunhofer			
Dist. focali delle lenti		Dist. recipr. delle lenti		Dist. focali delle lenti		Dist. recipr. delle lenti		Dist. focali delle lenti		Dist. recipr. delle lenti	
A a	6'9	*A B*	10,6	*A a*	20,0	*A B*	32,0	*A a*	19,0	*A B*	30,8
B b	9,2	*B C*	16,4	*B b*	25,5	*B C*	40,5	*B b*	28,6	*B C*	56,4
C c	9,0			*C c*	28,0			*C c*	31,8		
D d	7,0	*C D*	9,9	*D d*	15,3	*C D*	30,5	*D d*	18,0	*C D*	29,4
Distanza focale dell' obbiett.			76,0	Distanza focale dell' obbiett.			350,0	Distanza focale dell' obiett.			376
Apertura.			10,0	Apertura.			23,0	Apertura.			37

Le misure sono in linee del piede di Parigi.

In questi oculari, che possono servir di modello per la loro buona costruzione, le due lenti esterne hanno ad un dipresso una distanza focale eguale, e quella delle due lenti interne è all' incirca di $\frac{1}{3}$ maggiore. La distanza reciproca delle lenti in ciascuno dei due oculari composti è circa $\frac{2}{3}$ della somma delle distanze focali delle due lenti, e la distanza reciproca dei due oculari contata da una lente interna all' altra differisce poco dalla somma delle distanze focali del primo oculare positivo. I raggi di uno stesso pennello sortono da quest' oculare con una convergenza assai tenue, ed una nuova immagine è formata nel mezzo delle due lenti del secondo oculare negativo, la quale è in situazione inversa della prima, cioè nella stessa situazione dell' oggetto, e l' immagine è vista dall' occhio in questa situazione diritta per mezzo dei raggi di ciascun pennello luminoso, che sortono paralleli dall' ultima lente.

Fra le lenti *A* e *B* come pure fra le lenti *C* e *D* si costuma di porre dei diafragma che escludono i raggi esterni troppo divergenti.

Si fanno anche degli oculari terrestri con sole tre lenti, ma il loro effetto non è egualmente buono di quello dei precedenti.

Nota IV.

Obbiettivo acromatico.

Daremo in questa Nota un' idea del modo con cui un' obbiettivo composto di due lenti può soddisfare alle condizioni dell' acromatismo, di refrangibilità.

Un punto luminoso posto sull' asse di una lente convergente alla distanza D, forma la sua immagine nel fuoco conjugato alla distanza Δ (1), tale che

$$(1) \qquad \frac{1}{D} + \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{F};$$

il valore di F essendo dato da

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_{,}}\right).$$

Supponiamo di porre dietro questa prima lente, contigua ad essa, o ad una distanza trascurabile, una seconda lente, avente lo stesso asse. Si potrà supporre, rispetto a questa seconda lente, che i raggi partano dal fuoco conjugato Δ della prima, quindi dopo aver attraversato la seconda lente anderanno a riunirsi in un punto Δ', dato da

$$(3) \qquad -\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta'} = \frac{1}{F'};$$

essendo

$$(4) \qquad \frac{1}{F'} = (n'-1)\left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho_{,}'}\right).$$

Abbiamo dato a Δ, nell' equazione (3) il segno $-$, perchè il punto da cui partono i raggi è virtuale e situato dietro la lente, cioè dalla parte opposta in cui la suppone la formola (1) dell' articolo 9 della Lezione XXXVIII.

Sommando le equazioni (1) e (3) si ha

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{\Delta'} = \frac{1}{F} + \frac{1}{F'}.$$

Quest' equazione ci mostra che possiamo considerare la lente composta delle due, come una sola lente che abbia per distanza focale princi-

(1) Lez. XXVIII art. 9.

pale inversa, la somma delle due distanze focali principali inverse delle due singole lenti. Chiamando dunque F_2 la distanza focale principale della lente composta e facendo uso delle equazioni (2) e (4), potremo porre

$$(5)\quad \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F} + \frac{1}{F_1} = (n-1)\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1}\right) + (n'-1)\left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho_1'}\right).$$

I valori degli indici di rifrazione n ed n' essendo diversi pei diversi colori, la distanza focale F_2 risulterà in generale di valore diverso secondo i colori che si considerano: il che vuol dire che in generale la lente sarà soggetta ad un' aberrazione di refrangibilità. Si presenta però la questione se sia possibile di prendere i raggi di curvatura $\rho, \rho_1, \rho', \rho_1'$ delle superficie delle lenti in modo che la distanza focale F_2 sia la stessa per due specie di raggi colorati onde questi raggi abbiano uno stesso fuoco, e si riuniscano in un sol punto.

Per farsi un'idea più chiara della soluzione di questa questione giova premettere il calcolo dell' indice di rifrazione media, e del poter dispersivo (1) delle due materie di cui si vuole che le lenti dell'obbiettivo siano composte. Sceglieremo pei raggi da riunirsi quelli contigui alle linee C ed F dello spettro di Fraunhofer, poichè i raggi estremi dello spettro per la loro debolezza hanno poca influenza per colorire l' immagine.

Sia la prima lente di *crown-glass*, che secondo Fraunhofer ha per indice di rifrazione

Contiguo alla linea C nei raggi rossi . . . . $n_c = 1,52685$

Contiguo alla linea F nei raggi verdi . . . . $n_f = 1,53605$

Indice di rifrazione media $\frac{n_c + n_f}{2} = n = 1,53145$

Poter dispersivo $\frac{n_f - n_c}{n-1} = d = 0,017311$

Sia la seconda lente di *flint-glass*, che secondo Fraunhofer ha per indice di rifrazione

Contiguo alla linea C nei raggi rossi . . . . $n'_c = 1,62968$

Contiguo alla linea F nei raggi verdi . . . . $n'_f = 1,64826$

Indice di rifrazione media $\frac{n'_c + n'_f}{2} = n' = 1,63897$

Poter dispersivo $\frac{n'_f - n'_c}{n' - n'} = d' = 0,028078$

(1) Vedasi il n.° 3 della Nota I alla Lezione XXIV.

Vediamo ora se si può fare in modo che la distanza focale principale F_2 della lente composta, sia eguale pei raggi contigui alla linea C, e per quelli contigui alle linee F.

Perciò bisognerà che ponendo nell'equazione (5) prima n_c ed n'_c, e poi n_f ed n'_f in luogo di n ed n' il valore di F_2 non cambi. Ora dalle posizioni superiori

$$\frac{n_c+n_f}{2}=n \ ; \ \frac{n_f-n_c}{n-1}=d \ ; \ \frac{n'_c+n'_f}{2}=n' \ ; \ \frac{n'_f-n'_c}{n-1}=d'$$

si ricava

$$n_c=n-\frac{n-1}{2}d \ ; \ n_f=n+\frac{n-1}{2}d \ ; \ n_c'=n'-\frac{n'-1}{2}d' \ ; \ n_f'=n'+\frac{n'-1}{2}d' .$$

Sostituendo successivamente il primo ed il terzo di questi valori delle n, e poi il secondo ed il quarto, nell'equazione (5), e sottraendo una dall'altra le equazioni risultanti, se F_2 deve rimanere eguale, bisognerà che resti

$$d\,(n-1)\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}\right)+d'\,(n'-1)\left(\frac{1}{\rho'}+\frac{1}{\rho_1'}\right)=0 ;$$

o sia facendo uso delle equazioni (2) e (4)

$$\frac{d}{F}+\frac{d'}{F_1}=0 :$$

il che ci dice che le distanze focali principali delle due lenti devono essere una positiva e l'altra negativa e nella ragione diretta della dispersione delle relative materie.

Per mezzo di quest'equazione, e dell'equazione (5) si ricava

$$\frac{1}{F}=-\frac{d'}{d'-d}\cdot\frac{1}{F_2}$$

$$\frac{1}{F_1}=-\frac{d}{d'-d}\cdot\frac{1}{F_2} :$$

Siccome si ha $d'>d$, quest'ultima equazione ci fa vedere che la distanza focale principale della seconda lente è quella che deve essere negativa, e perciò questa lente deve essere divergente.

La distanza focale principale dell'obbiettivo sia data, e siano pur dati i raggi di curvatura delle superficie esterne delle due lenti ρ e ρ', ricavando dalle due premesse equazioni, combinate colle (2) e (4), i valori di $\frac{1}{\rho_1}$ ed $\frac{1}{\rho'}$ si otterrà

$$\frac{1}{\rho'}=-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{d'}{d'-d}\cdot\frac{1}{F_2}-\frac{1}{\rho}$$

$$\frac{1}{\rho'}=-\frac{1}{n'-1}\cdot\frac{d}{d'-d}\cdot\frac{1}{F_2}-\frac{1}{\rho_1'}$$

Assumiamo il numero 10 pel valore della distanza focale principale dell'obbiettivo F_2, e siano in proporzione di questa distanza

$$\rho = \tfrac{2}{3} F_2 = 6{,}6667 \quad ; \quad \rho_1' = \tfrac{4}{3} F_2 = 13{,}333.$$

Facendo le sostituzioni di questi valori, e di quelli dati sopra per n, n', d e d' si troverà

$$\rho' = 3{,}1748 \quad , \text{ e } \quad \rho_1 = -\,3{,}2768.$$

Cioè la seconda superficie della prima lente sarà convessa ed appartenente ad una sfera di raggio 3,1748, e la prima superficie della seconda lente sarà concava ed appartenente ad una sfera di raggio 3,2768. Vedasi la figura 156. L'obbiettivo costrutto ad un di presso con queste proporzioni è stato proposto da Sir J. Herschel, ed ha il vantaggio che non va soggetto all'abberrazione di rifrangibilità, tanto per gli oggetti molto lontani, che per quelli che non lo sono tanto.

NOTE ALLA LEZIONE XLI.

Nota I.

Sulla determinazione dell' angolo d' incidenza dei raggi efficaci nella produzione dell' iride (Art. 4).

Sostituiscasi nell' equazione (1), cioè nell' equazione

$$(1) \qquad \sin i = n \sin r$$

$i + d\,i$ ed $r + d\,r$ in luogo di i ed r, si avrà

$$\sin\,(i + d\,i) = n \sin\,(r + d\,r),$$

o vero sviluppando i seni delle somme

$$\sin i \cos d\,i + \cos i \sin d\,i = n\,(\sin r \cos d\,r + \cos r \sin d\,r)$$

Ma $d\,i$ e $d\,r$ essendo supposti potersi impicciolire indefinitamente, sarà lecito sostituire l' unità in luogo dei loro coseni, e gli archi in luogo dei seni; l' equazione precedente diverrà così

$$\sin i + d\,i \cos i = n \sin r + n\,d\,r \,.\, \cos r\,;$$

o vero per la riduzione che somministra l' equazione (1)

$$d\,i \cos i = n\,d\,r \,.\, \cos r.$$

Ora se le variazioni $d\,i$ e $d\,r$ devono soddisfare all' equazione (3) converrà che sia

$$(5)' \qquad d\,i = (\nu + 1)\,d\,r:$$

dunque sostituendo nell' equazione precedente questo valore di $d\,i$, e riducendo, si otterrà

$$(2)' \qquad (\nu + 1) \cos i = n \cos r.$$

Ma dall' equazione (1) si ricava

$$1 - \cos^2 i = n^2\,(1 - \cos^2 r)\,;$$

eliminando cos r fra queste due equazioni si avrà

$$1 - \cos^2 i = n^2 - (\nu + 1)^2 \cos^2 i,$$

dalla quale equazione si deduce

$$\cos i = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{(\nu + 1)^2 - 1}}.$$

L'equazione (2') dà poi

$$(5) \qquad \cos r = \frac{\nu + 1}{n} \cos i;$$

e l'equazione segnata (2) nel testo somministra

$$(6) \qquad \Delta = \pm \left((\nu - 1)\pi - 2(\nu + 1) r + 2 i \right);$$

con che tutte le equazioni citate si trovano dimostrate.

Nota II.

Sugli archi soprannumerarii dell'iride.

Secondo la descrizione data da Langwith riferita nel testo, il rosso del primo arco soprannumerario si confonde o succede al violetto dell'arco ordinario. Siccome la larghezza dell'arco baleno è circa di due gradi, e la deviazione dei raggi rossi dell'arco ordinario è di 42°. 02' (1), si potrà assumere 40.° 02' per la deviazione dei raggi rossi del primo arco soprannumerario. La larghezza dei quattro archi soprannumerarii presa assieme era, secondo la stessa descrizione, circa eguale alla larghezza dell'arco ordinario, prenderemo quindi due gradi di meno o sia 38°. 02' per la deviazione dei raggi rossi del quarto arco soprannumerario.

Se nelle formole (1) e (2) del testo si danno ad i dei valori differenti di 59°. 23', angolo che corrisponde all'incidenza sulle gocce d'acqua dei raggi rossi che formano l'arco ordinario, si trova che tanto aumentando il valore di quest'angolo i, quanto diminuendolo, quello della deviazione Δ diminuisce sempre, talchè la deviazione $\Delta = 42°. 02'$ che corrisponde al rosso dell'arco ordinario è la massima possibile. Cercando con tentativi quali sono i valori di i che corrispondono alle deviazioni 40°. 02', e 38°. 02' si trova

$$\left.\begin{array}{ll} i_1 = 49°.\,23' \;; & r_1 = 34\,.\,42 \\ i_1' = 68°.\,17' & r_1 = 44\,.\,10 \end{array}\right\} \Delta_1 = 40°.\,02$$

$$\left.\begin{array}{ll} i_2 = 44°.\,50' & r_2 = 31°.\,56' \\ i_2' = 72°.\,01' & r_2' = 45°.\,31' \end{array}\right\} \Delta_2 = 38°.\,02$$

Così i raggi rossi che escono paralleli dalle gocce acquee con una deviazione di 40°. 02' e, concorrono a formare il primo arco soprannumerario, sono quelli che cascano su di esse coll'incidenza di due primi valori di i, e quelli che escano colla deviazione 38°. 02' e formano il quart'arco soprannumerario cascono coll'incidenza dei due ultimi valori di i.

(1) Art. 5.

I due sistemi di raggi corrispondenti ai due primi valori di i percorrono però dei cammini diversi tanto internamente che esternamente alle gocce, e quindi si possono rinvigorire, o distruggere per interferenze secondo il diametro delle gocce. Lo stesso si deve dire dei due altri sistemi di raggi corrispondenti a due ultimi valori di i.

Rappresenti nella figura 187 $GIKE$ la sezione di una goccia d'acqua, ed SI, $S'I'$ due raggi di luce paralleli provenienti dal sole che incontrino la goccia d'acqua; l'uno con un'incidenza minore di 59°. 23', e l'altro con un'incidenza maggiore, ma tali che dopo aver attraversato la goccia, ed essere stati riflessi in K, sortano da essa in direzioni parallele ET, $E'T$.

Condotte le perpendicolari Cq, $Cq_,$ sulle direzioni SD, SD' dei raggi incidenti, e le perpendicolari Cp, Cp' sulle direzioni dei raggi affratti, è facile il vedere che gli angoli ICq, $I'Cq'$ saranno i complementi degli angoli d'incidenza i ed i' dei due raggi SI, $S'I'$, e che ICp, $I'Cp'$ saranno i complementi degli angoli di rifrazione r ed r' dei medesimi raggi.

Il cammino percorso dal raggio SI nell'interno della goccia per arrivare al punto di riflessione K, sarà la corda $IK = 2\cos r$; altrettanto cammino percorrerà dopo d'essere stato riflesso in K, così che il cammino totale sarà $4\cos r$.

Il cammino percorso nell'interno della goccia dal raggio incidente $S'I'$ sarà similmente $4\cos r'$, ma questo raggio è penetrato nella goccia dopo aver percorso lo spazio mI, da che il primo raggio SI fu deviato, ed uscito dalla goccia non ha riacquistato il parallelismo collo stesso raggio se non dopo aver corso all'esterno lo spazio $E'n = mI'$. Se si osserva che $mI' = E'n = qI - q'I$, e che $qI = \cos i$, $q'I = \cos i'$, si vede che il cammino percorso dal raggio $S'I'KE'T'$ dopo d'essere ritornato nella stessa direzione con ET, sarà composto delle due parti $4\cos r'$, e $2(\cos i - \cos i')$.

I cammini nell'interno della goccia saranno percorsi dai raggi con velocità diversa da quelle nell'aria, e per ridurli equivalenti, e corrispondenti ad un egual numero di periodi di fasi bisogna moltiplicare i primi per l'indice, n, di rifrazione dell'acqua (1). Il cammino del primo raggio incidente SI corrisponderà adunque ad uno fatto nell'aria eguale a $4n\cos r$, e quello del secondo raggio incidente $S'I'$ ad uno eguale a $4n\cos r' + 2(\cos i - \cos i')$.

Queste espressioni dei due cammini suppongono che il raggio della goccia d'acqua sia eguale all'unità; se questo raggio è d, diverranno

$$4dn\cos r \quad ; \quad 4dn\cos r' + 2d(\cos i - \cos i):$$

e la loro differenza sarà

(1) Lez. XXIX, art. 2 e 3.

$$2d \left\{ 2n\,(\cos r' - \cos r) + \cos i - \cos i' \right\}$$

Se si suppongono posti in questa formola per i, i', r ed r' i valori corrispondenti alla deviazione $\Delta_1 = 40^\circ.\ 02'$, e per d il raggio che avevano le gocce d'acqua nell'osservazione di Langwith, questa differenza di cammino dovrà essere tale che i raggi vengano a trovarsi nelle circostanze in cui sono atti a produrre il primo anello rosso, la qual differenza è secondo Newton (1) di 9 milionesimi di pollice inglese, o di 228,6 milionesimi di millimetro: si dovrà dunque avere

$$2d \left\{ 2n\,(\cos r_1' - \cos r_1) + \cos i_1 - \cos i_1' \right\} = 228{,}6.$$

Se invece si pongono per i, i', r ed r' i valori corrispondenti alla deviazione $\Delta_2 = 38^\circ.\ 02$, la differenza di cammino deve essere quella che negli anelli colorati di Newton corrisponde al quarto anello rosso, che è di 40,5 milionesimi di pollice, o 1028,7 milionesimi di millimetro, avremo dunque

$$2d \left\{ 2n\,(\cos r_2' - \cos r_2) + \cos i_2 - \cos i_2' \right\} = 1028{,}7.$$

Queste due formole devono dare lo stesso valore di $2d$ se il fenomeno succede come è stato spiegato. Ponendo effettivamente per i_1, i'_1, r_1 r'_1; i_2, i'_2, r_2 ed r'_2 i valori sopra riferiti, ed eseguendo il calcolo si trova

$$2d = 0{,}3387 \quad ; \quad 2d = 0{,}3535,$$

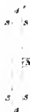
Questi due diametri sono sufficientemente concordi, poichè i dati dell'osservazione non sono stati presi con misure, ma semplicemente valutati col giudizio: il loro medio è $2d = 0{,}3461$ il qual è ad un dipresso il valore che è stato accennato da Young.

(1) Vedasi la Tavola dell'art. 8. Lez. XXIX.





F. 2.

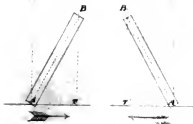


F 3.

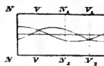


F. 14.

F. 14 bis



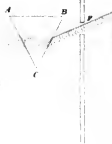
F



F.



F 19.



F. 23.





Lemmi Santoni inc.

F. 27.

F. 30.

F. 32.

F. 34.

F. 34 a.

38.

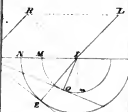
F. 39.

F. 45.

F. 46.

F. 49

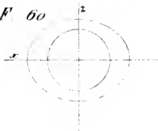
F. 50.



F. 55.



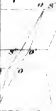
F. 60



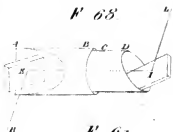
F. 63.



67.



F. 68.



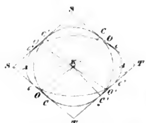
F. 72.



F. 70.



F. 61.

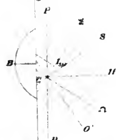


Tomm. Santoni inc.

F. 75.



F. 79.



F. 80.





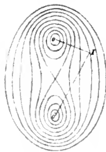
F. 86.



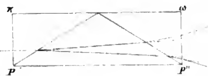
F. 87.



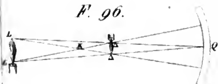
F. 89.



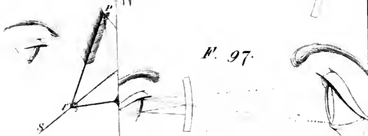
F. 91.



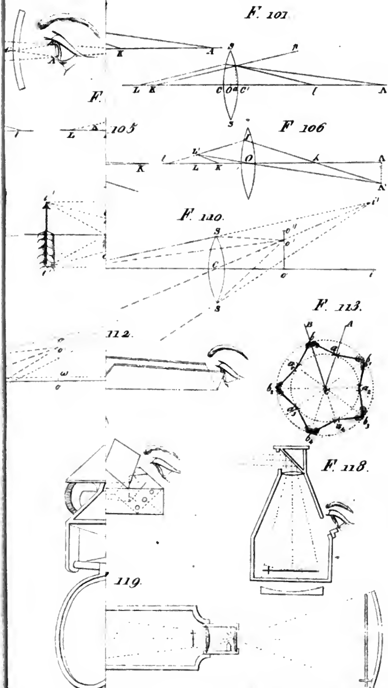
F. 96.

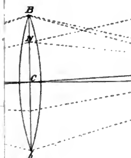


F. 97.

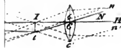


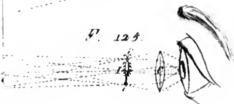
Tomm Santoni inc on ...


F. 101
F. 105
F 106
F. 110.
F. 113.
F. 112.
F. 118.
119.
Fein Sanlone inc.

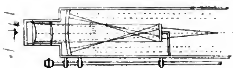

B
N
C
b

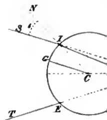

F. 122.
c
p
m

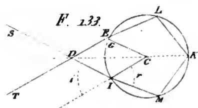

F. 123.
I
N
H
C


F. 125.

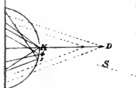

b'
a'


F. 129.


N
S
I
G
C
T
E

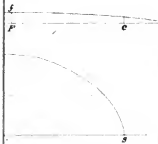

F. 133.
L
S
E
G
D
C
K
r
I
T
M

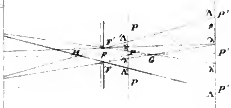

S' S' S' S
F. 137.
O


K
D
S.

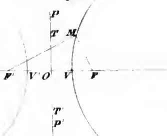
L

O



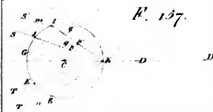












Tom · Sankne inc





